

# KALKULUS DASAR 1

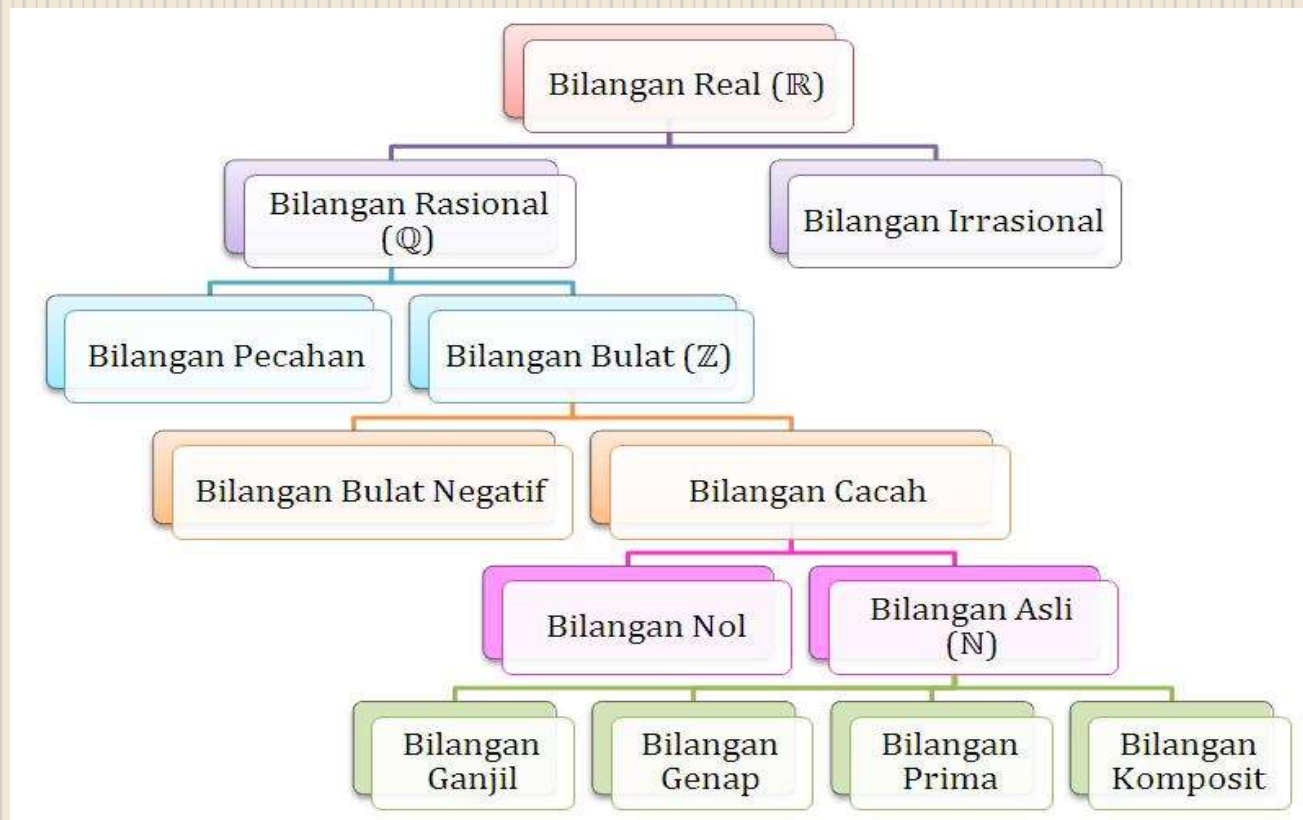
YAN BATARA SSi MSi

# Materi Pembelajaran Kalkulus Dasar 1

- **Bilangan Real, Ketidaksamaan, Nilai Mutlak**
- **Garis dan grafik**
- **Limit**
- **Differensial**
- **Penerapan differensial**

# BILANGAN REAL

- Bilangan real adalah bilangan yang merupakan gabungan dari bilangan rasional dan bilangan irrasional.



# Simbol-simbol baku

**R** = himpunan bilangan riil =  $\{...-2, -1.77, -1, 0, 0.21, 1, 2, 2.6789, ...\}$

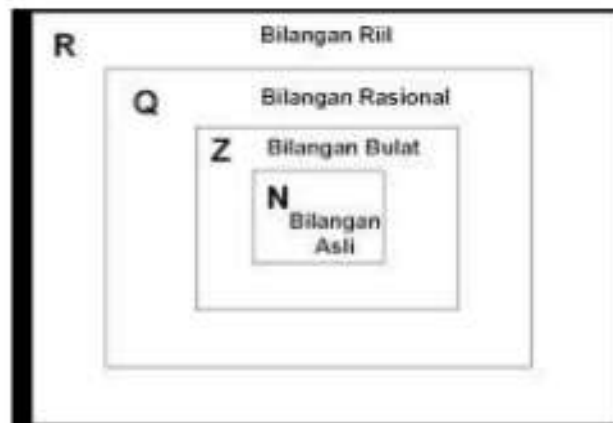
**Q** = himpunan bilangan rasional =  $\{..., -2, -1/2, 0, 1/3, 1, 3/2, 2, ...\}$

**Z** = himpunan bilangan bulat =  $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

**N** = himpunan bilangan asli (natural) =  $\{1, 2, ...\}$

**P** = himpunan bilangan bulat positif =  $\{0, 1, 2, 3, ...\}$

**C** = himpunan bilangan kompleks



# Bilangan Raional dan Irrasional

## Pengertian Bilangan Rasional

Bilangan rasional merupakan bilangan yang dinyatakan sebagai perbandingan dua bilangan bulat  $a$  dan  $b$ , ditulis  $a/b$  dengan syarat  $b \neq 0$ .

Bilangan rasional juga memiliki batasan yaitu terdapat pada selang  $(-\infty, \infty)$ .

Bilangan-bilangan rasional  $4/5, 1/7, 3/8, 6/7, 5/11, \dots, a/b \dots$  disebut bilangan-bilangan rasional pecahan biasa atau sering disebut pecahan biasa

Bilangan-bilangan rasional  $2 \frac{1}{2}, 476/3, 75/6, 23 \frac{1}{8}, \dots C a/b$  disebut bilangan-bilangan rasional pecahan sempurna atau sering disebut pecahan campuran

- Bilangan rasional dapat juga ditulis sebagai desimal dengan deret angka yang berulang teratur. Anda dapat memperhatikan beberapa contoh berikut :

$$1/8 = 0,125000 \dots (0 \text{ berulang teratur})$$

$$1/3 = 0,333333 \dots (3 \text{ berulang teratur})$$

$$1/4 = 0,250000 \dots (0 \text{ berulang teratur})$$

$$2/3 = 0,66666 \dots (6 \text{ berulang teratur})$$

$$3/7 = 0,428571428571 \dots (428571 \text{ berulang beraturan})$$

$$1/2 = 0,50000 \dots (0 \text{ berulang teratur})$$

$$3/2 = 0,66666 \dots (6 \text{ berulang teratur})$$

$$17/9 = 1,8888 \dots (8 \text{ berulang teratur})$$

## Bilangan irasional

Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak rasional. Bilangan irasional adalah bukan merupakan bilangan bulat dan juga bukan merupakan bilangan pecahan.

Jika bilangan irasional ditulis dalam bentuk decimal, bilangan itu tidak mempunyai pola yang berulang secara teratur.

**Contoh :**

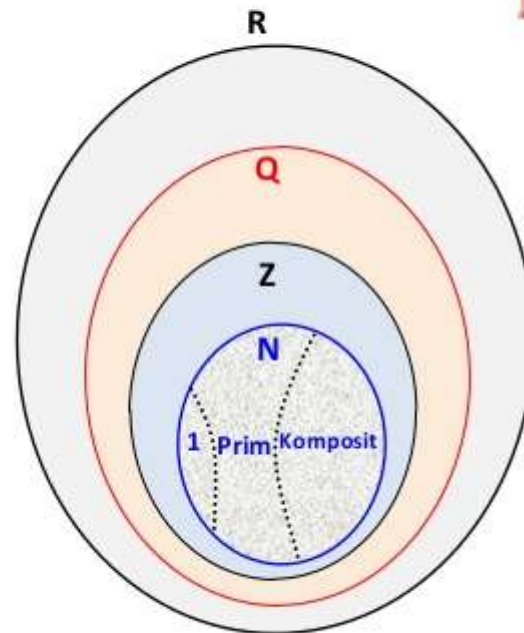
bilangan irasional  $\sqrt{3} = 1,732050807$  yang ternyata tidak mempunyai pola berulang secara teratur, dan tidak akan berakhir bilangan  $\sqrt{3}$  merupakan salah satu contoh bilangan irasional.

Bilangan-bilangan,  $\pi$  , dan  $e$  merupakan contoh- contoh lain bilangan irasional dengan  $\pi = 3,14$  dan  $e = 2,71828$

# Himpunan Bilangan Real

Diagram Venn Himpunan Bilangan Real

$$\mathbf{N \subset Z \subset Q \subset R}$$



R = himpunan bilangan real

Q = himpunan bilangan rasional

Z = himpunan bilangan bulat

N = himpunan bilangan asli



# Sistem Bilangan Real

- Himpunan bilangan real yang dilengkapi dengan sifat-sifat bilangan disebut **sistem bilangan real**.
- Sifat-sifat bilangan real dibagi menjadi:
  - Sifat Aljabar
  - Sifat Urutan
  - Sifat kelengkapan

# Sifat Aljabar

- (A1)  $a + b = b + a$  untuk semua  $a, b \in \mathbb{R}$  (sifat komutatif penjumlahan)
- (A2)  $(a + b) + c = a + (b + c)$  untuk semua  $a, b, c \in \mathbb{R}$  (sifat asosiatif penjumlahan)
- (A3) terdapat  $0 \in \mathbb{R}$  sedemikian hingga  $0 + a = a$  dan  $a + 0 = a$  untuk semua  $a \in \mathbb{R}$  (eksistensi elemen nol)
- (A4) untuk setiap  $a \in \mathbb{R}$  terdapat  $-a \in \mathbb{R}$  sedemikian hingga  $a + (-a) = 0$  dan  $(-a) + a = 0$  (eksistensi elemen negatif atau invers penjumlahan)
- (M1)  $a \cdot b = b \cdot a$  untuk semua  $a, b \in \mathbb{R}$  (sifat komutatif perkalian)
- (M2)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  untuk semua  $a, b, c \in \mathbb{R}$  (sifat asosiatif perkalian)
- (M3) terdapat  $1 \in \mathbb{R}$  sedemikian hingga  $1 \cdot a = a$  dan  $a \cdot 1 = a$  untuk semua  $a \in \mathbb{R}$  (eksistensi elemen unit 1)
- (M4) untuk setiap  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  terdapat  $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$  sedemikian hingga  $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$  dan  $\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$  (eksistensi invers perkalian)
- (D)  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  dan  $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$  untuk semua  $a, b, c \in \mathbb{R}$  (sifat distributif perkalian atas penjumlahan)

## Sifat-sifat Urutan

1. **Trikotomi**, Jika  $x$  dan  $y$  dua bilangan real, maka pasti salah satu diantara tiga hubungan berikut berlaku :

$$x < y \text{ atau } x = y \text{ atau } x > y$$

2. **Transitif**, Jika  $x < y$  dan  $y < z$ , maka  $x < z$

3. **Penambahan dan pengurangan**, Jika  $x < y$  maka

$$x \pm z < y \pm z$$

4. **Perkalian**,

Jika  $x < y$  dan  $z$  positif, maka  $xz < yz$

Jika  $x < y$  dan  $z$  negatif, maka  $xz > yz$

## \*Sifat kelengkapan bilangan real

**Sifat kelengkapan** dari himpunan bilangan real secara garis besar menyatakan bahwa terdapat cukup banyak bilangan – bilangan real untuk mengisi garis bilangan real secara lengkap sehingga tidak ada setitikpun celah diantaranya

Contoh :

Nyatakanlah apakah masing-masing yang berikut benar atau salah!

a.  $-2 < -5$

b.  $1/2 < 3/4$

# Interval Bilangan Real

**Interval** adalah suatu himpunan bagian dari garis bilangan real yang mengandung paling sedikit 2 bilangan real yang berbeda dan semua bilangan real yang terletak diantara keduanya.

Untuk setiap  $x, a, b, c \in R$ ,

1.  $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$  disebut *interval tutup*
2.  $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$  disebut *interval setengah tertutup* atau *terbuka*
3.  $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$  disebut *interval setengah terbuka* atau *tertutup*
4.  $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$  disebut *interval terbuka*

# Interval - interval tak hingga

- $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$
- $(a, \infty] = \{x \mid x \geq a\}$
- $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$
- $(-\infty, \infty] = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

# Ketidaksamaan

- Menyelesaikan ketidaksamaan dalam  $x$  berarti mencari interval atau interval-interval dari bilangan yang memenuhi ketidaksamaan tersebut.
- Cara menyelesaikan ketidaksamaan :
  1. tambahkan kedua sisi dengan bilangan yang sama
  2. kalikan kedua sisi dengan bilangan positif
  3. kalikan kedua sisi dengan bilangan negatif, tapi tanda ketidaksamaan berubah

## Contoh:

Selesaikan ketidaksamaan berikut dan gambarkanlah kumpulan solusinya pada garis bilangan real!

- a.  $4x - 7 < 3x + 5$
- b.  $7x - 1 \leq 10x + 4$
- c.  $-2 < 1 - 5x \leq 3$
- d.  $-6 < 2x + 3 < -1$

# Nilai Mutlak

- Definisi nilai mutlak :  $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
- Jadi  $|x| \geq 0$  untuk setiap bilangan real  $x$  dan  $|x| = 0$  jika dan hanya jika  $x = 0$ .
- $|x|$  dapat juga didefinisikan sebagai:  $|x| = \sqrt{x^2}$
- Secara Geometri:  
 $|x|$  menyatakan jarak dari  $x$  ke titik asal.  
 $|x - y|$  = jarak diantara  $x$  dan  $y$



# Sifat nilai mutlak

- $|-a| = |a|$
- $|ab| = |a| |b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|x|^2 = x^2$
- $|x| < a$  jika dan hanya jika  $-a < x < a$
- $|x| > a$  jika dan hanya jika  $x > a$  atau  $x < -a$
- $|x| < |y|$  jika dan hanya jika  $x^2 < y^2$

## Contoh :

- Selesaikan persamaan berikut:

$$|x+1| = 4$$

$$|2x-1| = |x+4|$$

- Tentukan solusi dari ketaksamaan berikut:

$$|2x-1| < 7$$

$$|2x-7| > 3$$

$$|4x+2| \geq 6$$

$$|3x-2| \geq |2x+7|$$