Graf

Pengantar

Definisi: Suatu graf sederhana G = (V, E) terdiri dari V, himpunan tak kosong dari simpul (vertex), dan E, himpunan pasangan tak berurut anggota berlainan dari V yg disebut garis hubung (edge).

Graf sederhana mirip seperti graf berarah, tetapi arah garis hubungnya tidak ditentukan (tdk memiliki arah).

Kadangkala kita ingin memodelkan **hubungan ganda** antar simpul, yang tidak mungkin dilakukan dengan graf sederhana.

Pada kasus ini, kita harus memakai **multigraf** .

Pengantar

Definisi: Suatu **multigraf** $G = (V, E)$ terdiri dari himpunan simpul V, himpunan garis hubung E, dan sebuah fungsi f dari E ke $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$.

Garis hubung e_1 dan e_2 disebut **garis hubung berganda atau garis hubung sejajar** jika $f(e_1) = f(e_2)$.

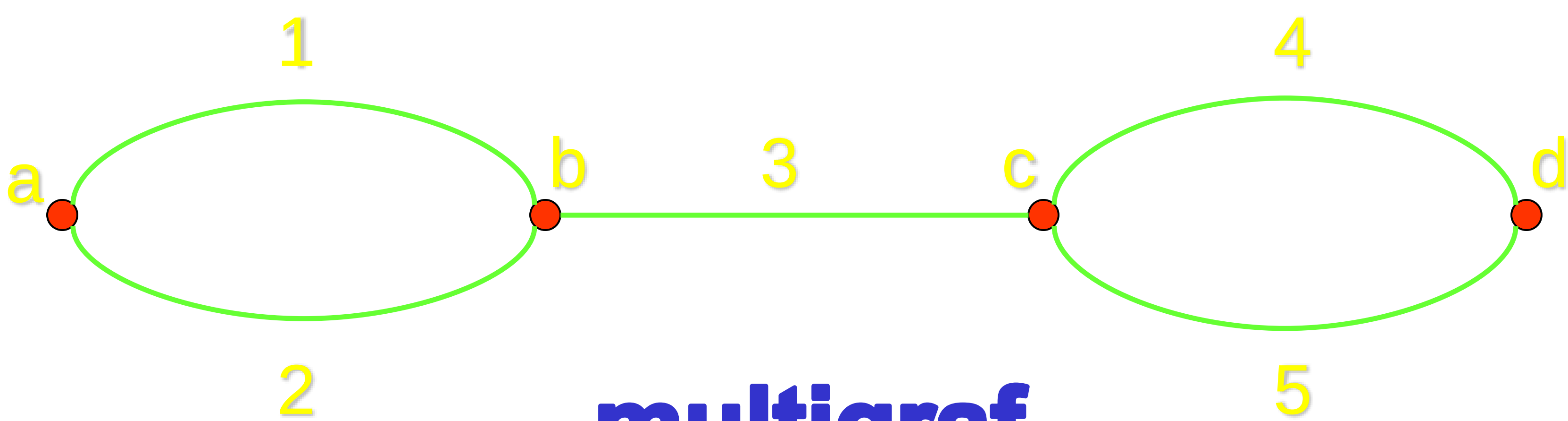
Catatan:

•Garis hubung dalam multigraf tidak perlu didefinisikan sebagai pasangan, tapi bisa berjenis apapun.

•Loop tidak diperbolehkan dalam multigraf ($u \neq v$).

Pengantar

Contoh: Suatu multigraf G dengan simpul V = {a, b, c, d}, garis hubung {1, 2, 3, 4, 5} dan fungsi f dengan f(1) = {a, b}, f(2) = {a, b}, f(3) = {b, c}, f(4) = {c, d} dan f(5) = {c, d}:



multigraf

Pengantar

Untuk mendefinisikan loop, kita perlu mendefinisikan pseudograf berikut:

Definisi: Suatu **pseudograf** G = (V, E) terdiri dari himpunan simpul V, himpunan garis hubung E, dan fungsi f dari E ke $\{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$.

Suatu garis hubung disebut loop jika $f(e) = \{u, u\}$ untuk suatu $u \in V$.

Pengantar

Graf yang telah kita kenal:

Definisi: Suatu **graf berarah** G = (V, E) terdiri dari himpunan simpul V dan himpunan garis hubung E yaitu pasangan berurut anggota V.

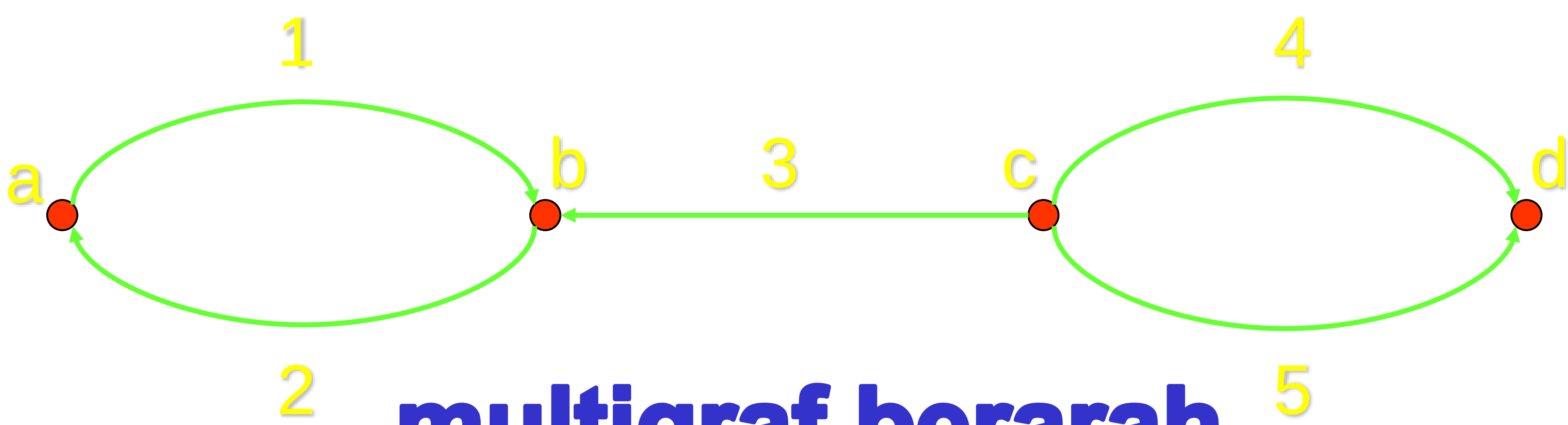
Graf jenis lain:

Definisi: Suatu **multigraf berarah** G = (V, E) terdiri dari himpunan simpul V, himpunan garis hubung E, dan fungsi f dari E ke $\{(u, v) \mid u, v \in V\}$.

Garis hubung e_1 dan e_2 disebut **garis hubung ganda** jika $f(e_1) = f(e_2)$.

Pengantar

Contoh: Suatu multigraf berarah G dengan simpul V = {a, b, c, d}, garis hubung {1, 2, 3, 4, 5} dan fungsi f dimana f(1) = (a, b), f(2) = (b, a), f(3) = (c, b), f(4) = (c, d) dan f(5) = (c, d) digambarkan sbb.



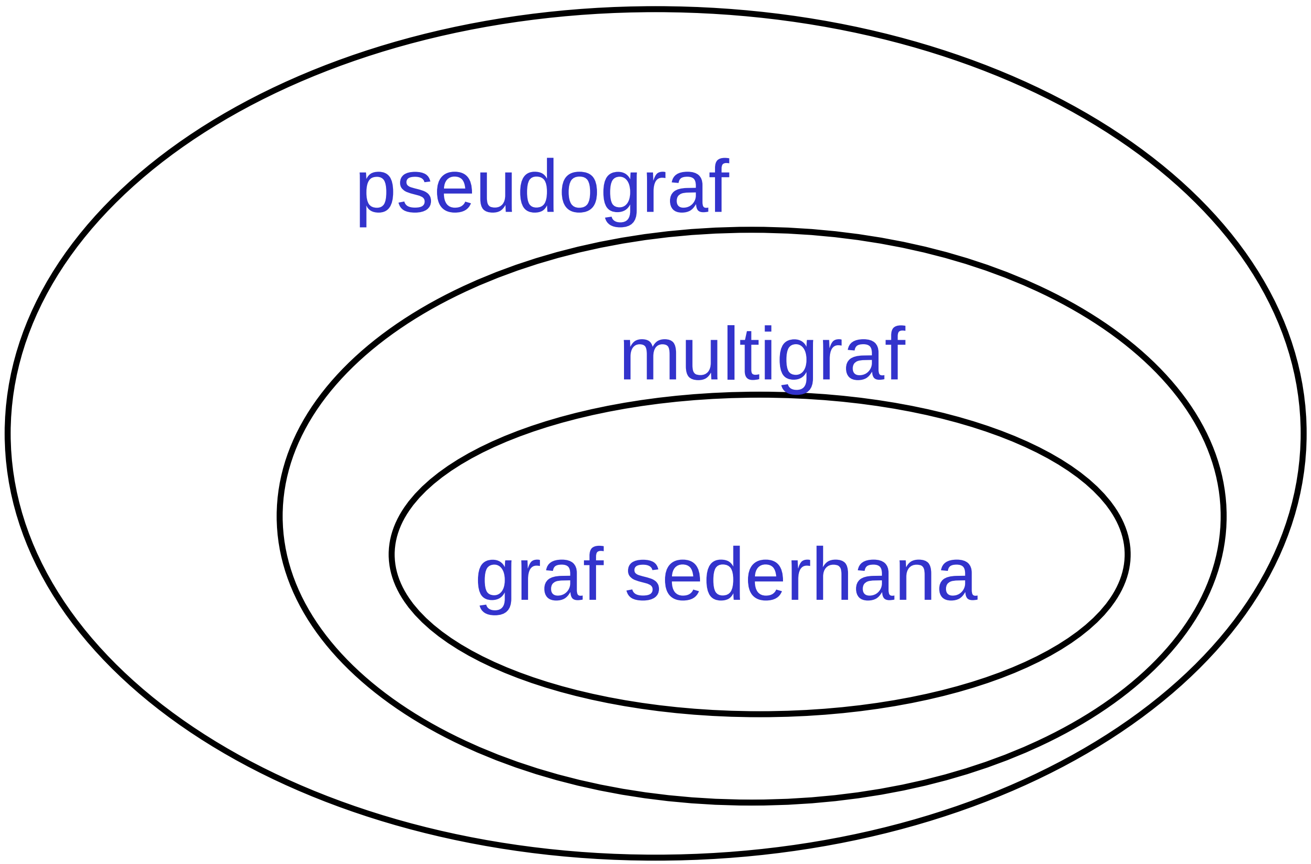
multigraf berarah

Pengantar

Jenis Graf dan Sifat-Sifatnya

Jenis	**Garis hubung**	**Grs hub. ganda?**	**Loop?**
Graf sederhana	tak berarah	tidak	tidak
multigraf	tak berarah	ya	tidak
pseudograf	tak berarah	ya	ya
graf berarah	berarah	tidak	ya
multigraf berarah	berarah	ya	ya

Diagram Venn graph tak berarah



Model Graf

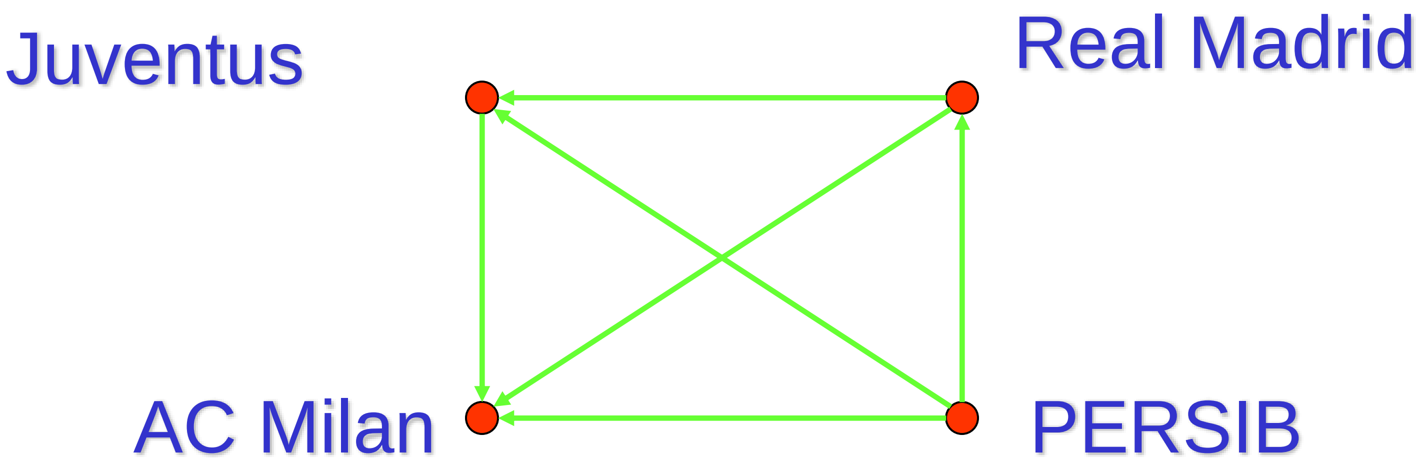
Contoh I: Bagaimana cara merepresentasikan jaringan (dua arah) KA yang menghubungkan sekumpulan kota?

Kita harus memakai **graf sederhana** dengan garis hubung {a, b} merupakan jalur langsung yang menghubungkan kota a dengan kota b.

Model Graf

Contoh II: Dalam suatu turnamen sepakbola, setiap tim bertanding dengan tim lain tepat satu kali. Bagaimana cara merepresentasikan hasil turnamen (tim apa mengalahkan tim lain) ?

Kita harus menggunakan **graf berarah** dengan garis hubung (a, b) menunjukkan tim a mengalahkan tim b.



Terminologi Graf

Definisi: Dua simpul u dan v dalam graf tak berarah G disebut **berdekatan** (atau **bertetangga**) dalam G jika {u,v} adalah garis hubung dalam G.

Jika e = {u, v}, garis hubung e disebut ***incident*** dengan simpul u dan v, atau disebut juga **menghubungkan** u dengan v.

Simpul u dan v disebut juga titik ujung (*endpoints*) dari garis hubung {u,v}.

Terminologi Graf

Definisi: Derajat dari suatu simpul pada graf tak berarah adalah banyaknya garis hubung yang berasal dari/berakhir ke simpul tsb, kecuali loop di dalam simpul yang menyumbang dua derajat simpul.

Dengan kata lain, derajat dari simpul dapat ditentukan secara sederhana, yaitu dengan **menghitung banyaknya garis yang menyentuh** simpul tersebut.

Derajat dari simpul v dituliskan sebagai **deg(v).**

Terminologi Graf

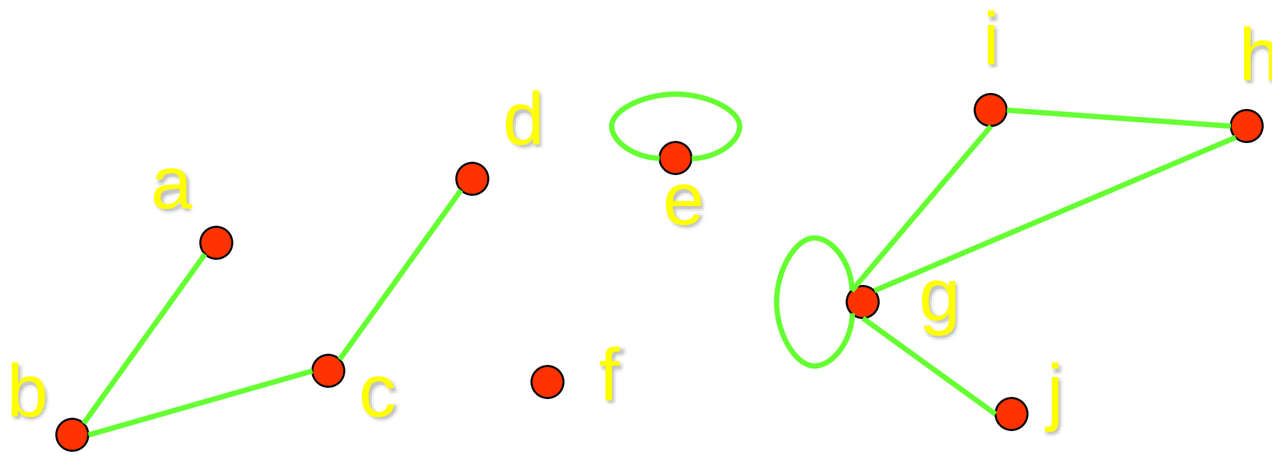
Simpul dengan derajat nol disebut **terisolasi**, karena tidak bertetangga/terhubung (*adjacent*) dengan simpul lain.

Catatan: Suatu simpul yang memiliki **loop** minimal berderajat 2 dan, perdefinisi, **tidak terisolasi**, meski dia tidak terhubung ke simpul lain.

Simpul berderajat satu disebut ***pendant*** (menggantung). Simpul ini terhubung dengan tepat satu simpul lainnya.

Terminologi Graf

Contoh: Diantara graf berikut, manakah simpul yang terisolasi, yang *pendant*, dan berapakah derajat maksimumnya. Graf jenis apakah mereka ?

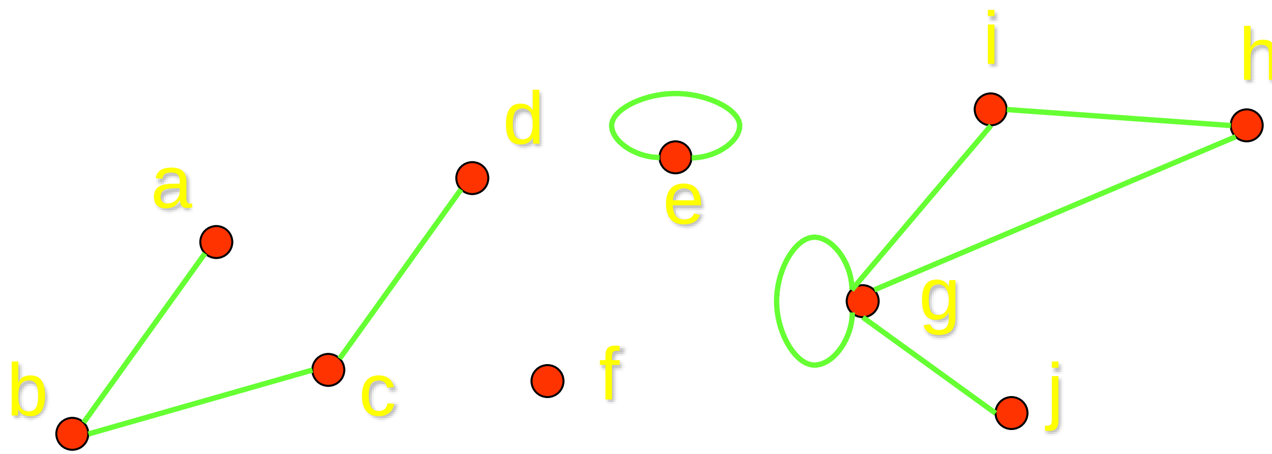


Jawab: Simpul f terisolasi, dan simpul a, d, dan j *pendant*. (pendant), derajat maksimum-nya adalah deg(g)=5.

Graf tersebut merupakan pseudograf (tak berarah, memiliki loop).

Terminologi Graf

Amati graf yang sama dan tentukan banyaknya garis hubung dan jumlah dari derajat semua simpulnya.



Hasil: Ada 9 garis hubung, dan jumlah seluruh derajat simpulnya adalah 18. Mudah untuk dijelaskan: Setiap garis hubung baru menambah hasil penjumlahan derajat sebanyak dua. Hasil ini kita rumuskan dalam *T. Handshaking*.

Terminologi Graf

Teorema *Handshaking*: Misalkan G = (V, E) suatu graf tak berarah dengan garis hubung e. Maka

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Catatan: Teorema ini tetap berlaku meskipun pada graf terdapat garis hubung ganda dan/atau loop.

Contoh: Ada berapa garis hubungkah didalam graf yang memiliki 6 simpul, yang masing-masing simpulnya berderajat 10 ?

Jawab: Jumlah seluruh derajat simpul adalah $6 \cdot 10 = 60$. Menurut teorema Handshaking, maka $2e = 60$, jadi ada 30 buah garis hubung.

Terminologi Graf

Teorema: Suatu graf tak berarah (selalu) memiliki simpul berderajat ganjil yang jumlahnya genap.

Penjelasan: Ada tiga kemungkinan untuk menambahkan garis hubung untuk menyambung dua simpul dalam graf:

Sebelum:	**Sesudah:**
Kedua simpul ber-derajat genap	Kedua simpul berderajat ganjil
Kedua simpul ber-derajat ganjil	Kedua simpul berderajat genap
Satu simpul berderajat ganjil, yang lain genap	Satu simpul berderajat genap, yang lain ganjil

Terminologi Graf

Ada dua kemungkinan menambahkan suatu loop ke simpul dalam graf :

Sebelum:		**Sesudah:**
Simpul berderajat genap	⇨	Simpul berderajat genap
Simpul berderajat ganjil	⇨	Simpul berderajat ganjil

Terminologi Graf

Jadi, jika dalam graf ada sejumlah genap simpul berderajat ganjil, hasil penambahan garis hubung masih saja menghasilkan simpul berjumlah genap

Maka, karena suatu graf tak berarah **tanpa garis hubung** memiliki sejumlah genap simpul berderajat ganjil (nol), hal yang sama berlaku untuk **sebarang** graf tak berarah.

Bukti dapat dipelajari dari buku referensi.

Terminologi Graf

Definisi: Jika (u,v) suatu garis hubung dari graf G dengan garis hubung berarah, u disebut **terhubung** ke (*adjacent to*) v, dan v dikatakan **terhubung dari** (adjacent from) u.

Simpul u disebut **simpul awal** (initial vertex) dari (u,v), dan v disebut sebagai **simpul akhir** (terminal vertex) dari (u,v).

Simpul awal dan simpul akhir dari suatu loop adalah sama.

Terminologi Graf

Definisi: Dalam graf dengan garis hubung berarah, **derajat kedalam (*in-degree*)** dari simpul v, dituliskan sebagai **$\deg^-(v)$**, adalah banyaknya garis hubung dengan v sebagai **simpul akhir-nya**.

Derajat keluar (*out-degree*) dari v, dituliskan sebagai **$\deg^+(v)$**, adalah banyaknya garis hubung dengan v sebagai simpul asal-nya.

Pertanyaan: Bagaimana perubahan derajat keluar dan kedalam suatu simpul terhadap penambahan suatu loop ke simpul tsb ?

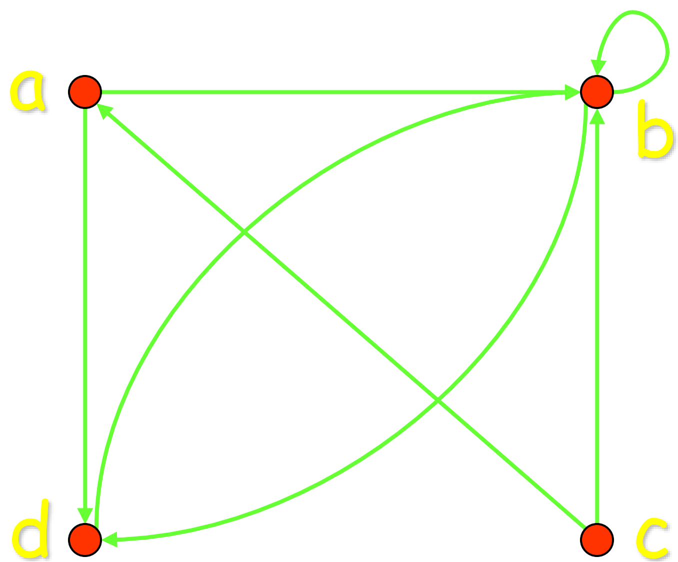
Jawab: Penambahan tersebut meningkatkan baik derajat keluar maupun kedalam dari simpul ybs sebesar satu.

Terminologi Graf

Contoh: Berapakah derajat keluar dan kedalam dari simpul a, b, c, d pada graf berikut

$deg^-(a) = 1$

$deg^+(a) = 2$



$deg^-(b) = 4$

$deg^+(b) = 2$

$deg^-(d) = 2$

$deg^+(d) = 1$

$deg^-(c) = 0$

$deg^+(c) = 2$

Terminologi Graf

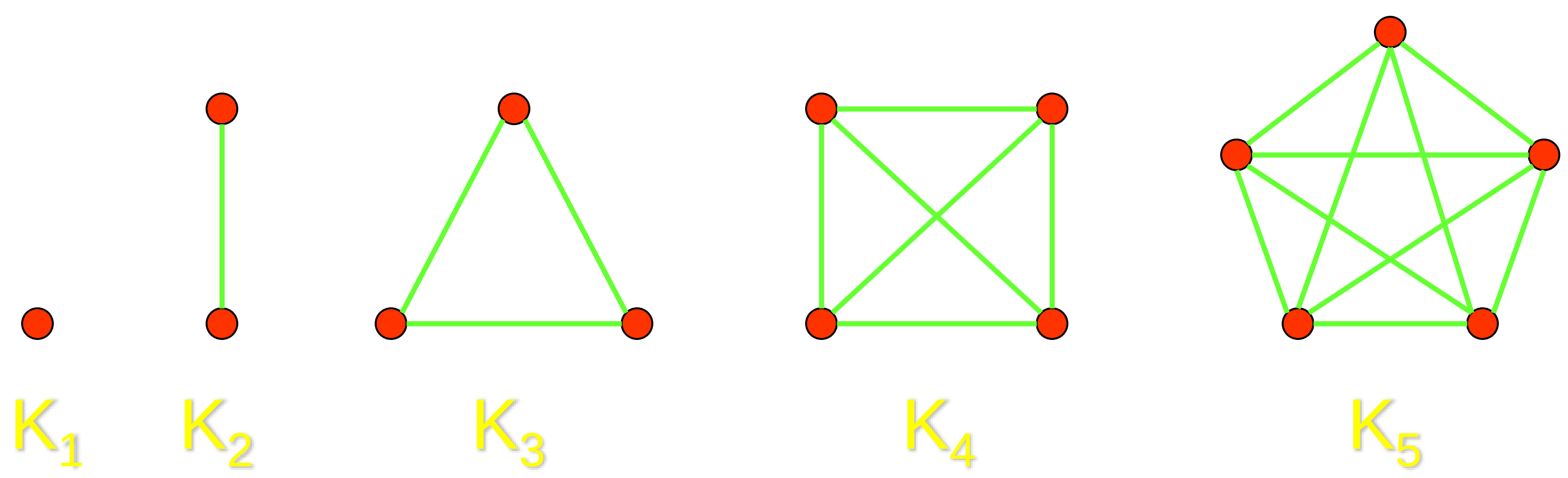
Teorema: Misalkan G = (V, E) graf dengan garis hubung berarah. Maka:

$$\sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = |E|$$

Ini mudah diperiksa, sebab setiap penambahan garis hubung baru meningkatkan baik derajat kedalam maupun derajat keluar sebanyak satu.

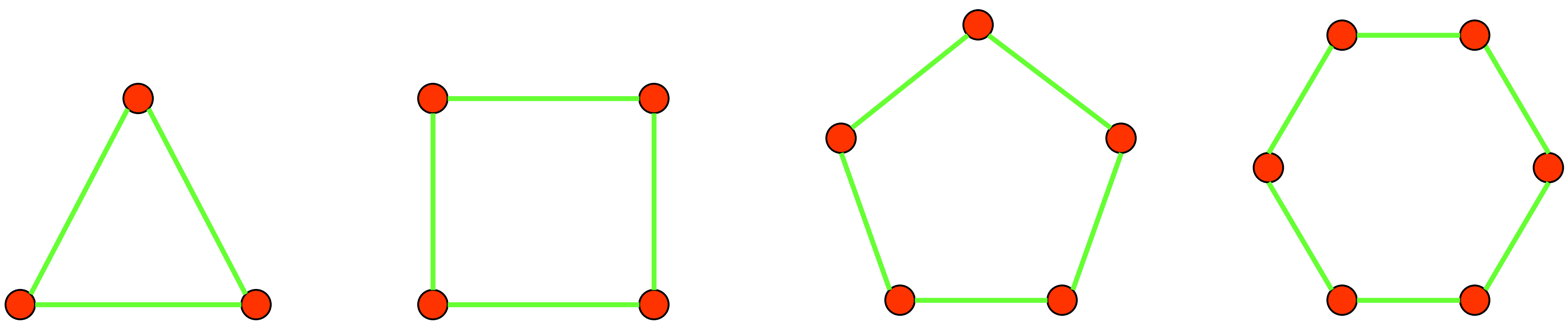
Graf Khusus

Definisi: Graf lengkap (complete graph) pada n buah simpul, dituliskan sebagai K_n, adalah graf sederhana yang mengandung tepat satu garis hubung antara dua simpul yang berbeda.



Graf Khusus

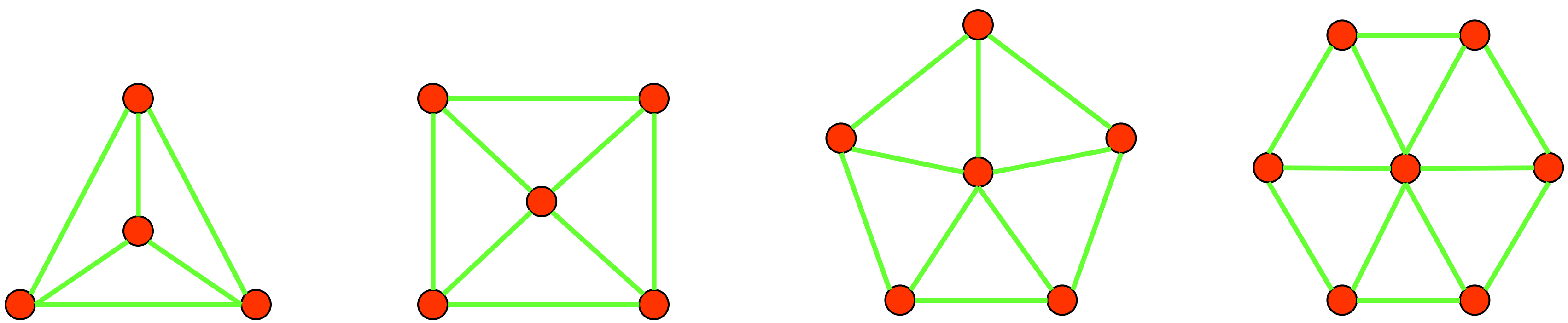
Definisi: Siklus (cycle) C_n, $n \geq 3$, adalah graf yg terdiri dari n-buah simpul $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan garis hubung $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$.



C_3 C_4 C_5 C_6

Graf Khusus

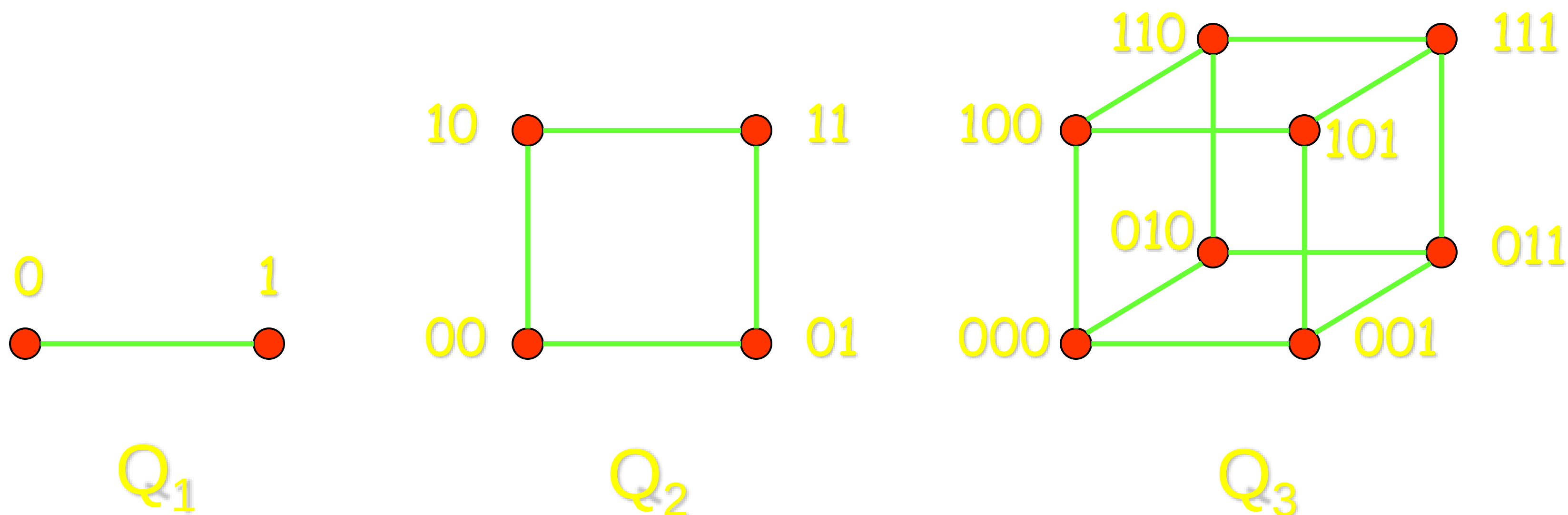
Definisi: Pemberian satu simpul tambahan pada suatu siklus C_n, $n \geq 3$, dan lalu menghubungkan simpul tsb ke setiap simpul pada C_n dengan garis hubung baru akan menghasilkan graf **roda (*wheel*)**.



W_3 W_4 W_5 W_6

Graf Khusus

Definisi: Kubus-n (n-cube) dituliskan sebagai Q_n adalah graf yang simpulnya merepresentasikan 2^n buah untai-bit (*bit string*) sepanjang n. Dua simpul terhubung jika dan hanya jika bit string yang direpresentasikannya berbeda tepat satu bit.



Graf Khusus

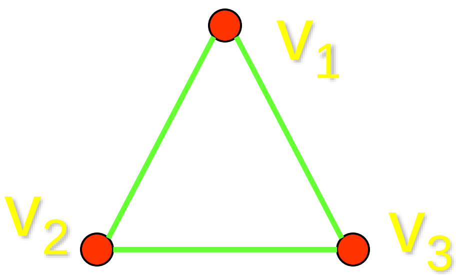
Definisi: Suatu graf sederhana disebut ***bipartite*** (*bigraph*) jika himpunan simpul V nya dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong yang tak beririsan V_1 dan V_2 sedemikian hingga setiap garis hubung dalam graf menghubungkan suatu simpul di V_1 dengan simpul di V_2 (sedemikian hingga tak ada garis hubung di dalam G menghubungkan dua simpul di V_1 maupun di V_2).

Sebagai contoh, tinjau suatu graf yang merepresen-tasikan setiap penduduk di suatu desa dengan simpul dan setiap pernikahan dengan garis hubung.

Graf ini ***bipartite***, karena setiap garis hubung menghubungkan simpul dalam **himpunan bagian penduduk pria** dengan simpul didalam **himpunan bagian penduduk wanita** (dalam terminology pernikahan tradisional).

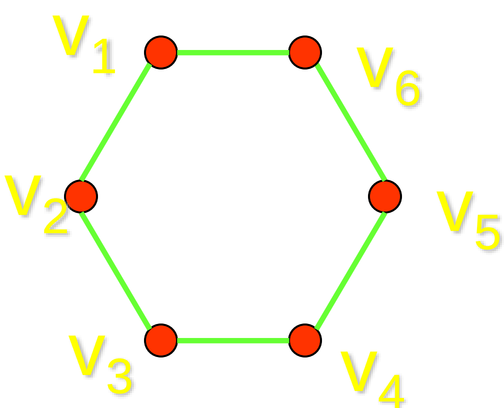
Graf Khusus

Contoh I: Apakah C_3 *bipartite*?

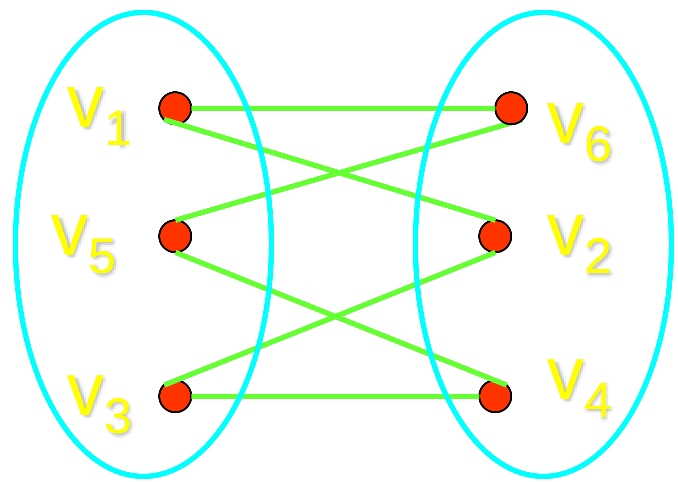


Tidak, sebab tidak ada cara mem-partisi simpul menjadi dua himpunan sedemikian hingga tidak ada garis hubung dengan kedua titik akhir di himpunan yang sama.

Contoh II: Apakah C_6 *bipartite*?

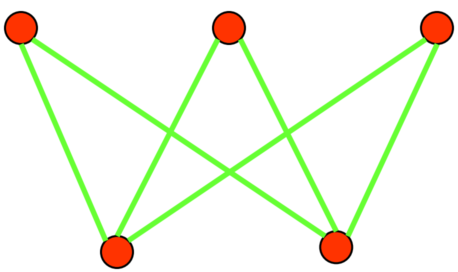


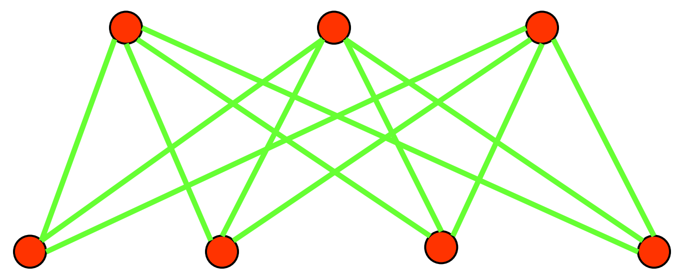
Ya, sebab C_6 bisa ditampilkan sebagai berikut:



Graf Khusus

Definisi: Graf *bipartite* lengkap $K_{m,n}$ adalah graf yang himpunan simpulnya dipartisi kedalam dua himpunan bagian, masing-masing dengan m dan n buah simpul. Dua simpul terhubung jika dan hanya jika mereka berada di himpunan bagian yang berbeda.


$K_{3,2}$


$K_{3,4}$

Lengkap: simpul dari satu himpunan dihubungkan ke semua simpul himpunan pasangannya

Bersambung ke ppt berikutnya

…