Relasi

Relasi

Untuk menggambarkan hubungan antara dua anggota himpunan A dengan B, kita bisa menggunakan **pasangan berurut** (*ordered pairs*), dimana anggota pertama diambil dari A dan yang kedua diambil dari B.

Relasi antara **dua himpunan** ini disebut sebagai **relasi biner.**

Definisi: Tinjau dua himpunan A dan B. Relasi biner dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

Dengan kata lain, untuk relasi biner R kita mempunyai $R \subseteq A \times B$. Notasi *a*R*b* dipakai untuk menyatakan bahwa $(a, b) \in R$ dan $a\underline{R}b$ untuk menyatakan $(a, b) \notin R$.

Relasi

Jika (a, b) anggota R, maka kita katakan bahwa a di-relasi-kan dengan b oleh R.

Contoh: Andaikan P himpunan orang, C himpunan mobil dan D relasi yang mengaitkan nama-orang dengan mobil yang dikendarainya.

P = {Carl, Suzanne, Peter, Carla},

C = {Mercedes, BMW, tricycle}

D = {(Carl, Mercedes), (Suzanne, Mercedes),
(Suzanne, BMW), (Peter, tricycle)}

Ini berarti Carl mengendarai Mercedes, Suzanne megendarai Mercedes dan BMW, Peter mengendarai tricycle sedangkan Carla tidak mengendarai mobil apapun (dlm himpunan C).

Fungsi Sebagai Relasi

Kita ingat bahwa fungsi *f* dari himpunan A ke himpunan B memasangkan elemen B yang unik ke setiap elemen A.

Graf dari *f* adalah himpunan pasangan berurut (a,b) sedemikian hingga b = f(a).

Karena graf dari *f* adalah himpunan bagian dari $A \times B$, maka graf adalah juga merupakan **relasi** dari A ke B.

Terlebih lagi, untuk setiap **a** anggota dari A, ada tepat satu pasangan berurut di dalam graf dengan **a** sebagai anggota pertamanya.

Fungsi Sebagai Relasi

Sebaliknya, jika R adalah relasi dari A ke B sedemikian hingga setiap anggota A adalah anggota pertama dari tepat satu pasangan berurut R, maka dapat didefinisikan suatu fungsi dengan R sebagai graf-nya.

Hal ini dilakukan dengan memasangkan ke suatu anggota $a \in A$, suatu anggota unik $b \in B$ sedemikian hingga $(a, b) \in R$.

Relasi pada Suatu Himpunan

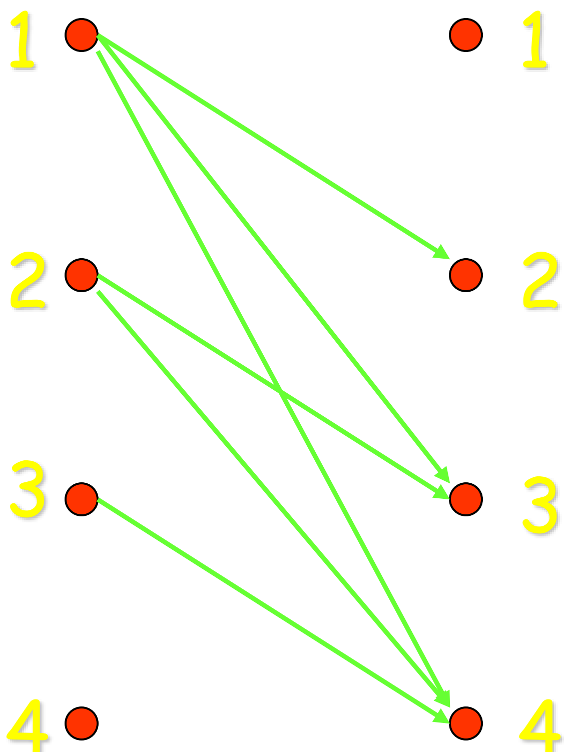
Definisi: Suatu relasi pada himpunan A adalah relasi dari A ke A.

Dengan kata lain, relasi pada A adalah himpunan bagian dari $A \times A$.

Contoh: Mis. $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Pasangan berurut manakah yang ada dalam relasi $R = \{(a, b) \mid a < b\}$?

Relasi pada Suatu Himpunan

Jawaban: R = {(1, 2),(1, 3),(1, 4),(2, 3),(2, 4),(3, 4)}



R	1	2	3	4
1		X	X	X
2			X	X
3				X
4				

Relasi pada Suatu Himpunan

Berapa banyak relasi berbeda yang bisa didefinisikan pada suatu himpunan A dengan n-buah anggota ?

Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$.

Ada berapa banyakkah anggota $A \times A$?

Ada n^2 anggota dari $A \times A$, jadi seberapa banyak himpunan bagian (=relasi pada A) yang dimiliki $A \times A$?

Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari suatu himpunan dengan *m* buah anggota adalah 2^m (ingat *power set*). Karena d.h.i. $m=n^2$, maka ada 2^{n^2} himpunan bagian yang bisa dibentuk dari $A \times A$.

Jawab: Kita bisa mendefinisikan 2^{n^2} buah relasi berbeda pada A, dengan $|A|=n$.

Sifat-Sifat Relasi

Kita kini akan melihat beberapa cara yang berguna untuk mengkelompokkan relasi.

Definisi: Suatu relasi R pada himpunan A disebut **refleksif** jika $(a,a) \in R$ untuk setiap anggota $a \in A$.

Apakah relasi pada {1, 2, 3, 4} ini refleksif ?

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)} Tidak.

R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)} Ya.

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)} Tidak.

Definisi: Suatu relasi pada himpunan A disebut irefleksif (tak refleksif) jika $(a, a) \notin R$ untuk setiap anggota $a \in A$.

Sifat-Sifat Relasi

Definisi:

Suatu relasi R pada himpunan A disebut **simetrik (setangkup)** jika $(b, a) \in R$ kalau $(a, b) \in R$ untuk semua $a, b \in A$.

Suatu relasi R pada himpunan A disebut **antisimetrik** jika $a = b$ kalau $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$.

Beberapa definisi relasi antisimetrik

- *E.Weisstein "A relation on a set is antisymmetric provided that distinct elements are never both related to one another"*
- *Wiki: A binary relation R on a set X is antisymmetric if, for all a and b in X*

  if R(a,b) and R(b,a), then a=b

  or: if R(a,b) with $a \neq b$, then R(b,a) must not hold
- *Mathematical notations:*

$$\forall a,b \in X,\ R(a,b) \wedge R(b,a) \Rightarrow a=b$$

Or

$$\forall a,b \in X,\ R(a,b) \wedge a \neq b \Rightarrow \neg R(b,a)$$

Sifat-Sifat Relasi

Apakah relasi pada {1, 2, 3, 4} berikut ini simetrik atau antisimetrik?

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)}	simetrik
R = {(1, 1)}	sim. dan antisim.
R = {(1, 3), (3, 2), (2, 1)}	antisim.
R = {(4, 4), (3, 3), (1, 4)}	antisim.

Sifat-Sifat Relasi

Definisi: Relasi R pada himpunan A disebut **transitif** jika, untuk $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$ untuk $a, b, c \in A$.

Apakah relasi pada {1, 2, 3, 4} berikut ini transitif ?

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)} Ya.

R = {(1, 3), (3, 2), (2, 1)} Tidak.

R = {(2, 4), (4, 3), (2, 3), (4, 1)} Tidak.

Counting (Pencacahan) Relasi

Contoh: Berapa banyak relasi refleksif-kah yang bisa didefinisikan pada himpunan A dengan n anggota ?

Jawaban: Relasi pada R adalah himpunan bagian dari $A \times A$, yang mengandung n^2 anggota.

Oleh karena itu dapat dibuat relasi pada A yang berlainan dengan memilih himpunan bagian yang berlainan diantara n^2 anggota, jadi ada 2^{n^2} relasi.

Tetapi relasi yang **refleksif**, **harus** mengandung n anggota (a, a) untuk setiap $a \in A$.

Akibatnya, kita hanya bisa memilih diantara

$n^2 - n = n(n - 1)$ anggota untuk membuat relasi refleksif, jadi ada $2^{n(n-1)}$ relasi refleksif.

Melakukan Kombinasi pada Relasi

Relasi adalah himpunan-himpunan, dan karena itu, kita bisa menerapkan **operasi himpunan** pada relasi.

Jika kita punya dua relasi R_1 dan R_2, dan keduanya adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka kita bisa mengkombinasikan $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, atau $R_1 - R_2$.

Hasil untuk setiap kasus adalah **relasi dari A ke B yang lain lagi**.

Melakukan Kombinasi pada Relasi

… dan ada satu cara penting untuk mengkom-binasikan relasi.

Definisi: Tinjau relasi R dari himpunan A ke himpunan B dan relasi S dari himpunan B ke himpunan C. Relasi **komposit** dari R dan S adalah relasi yang terdiri dari pasangan berurut (a, c), dimana $a \in A$, $c \in C$, dan ada anggota $b \in B$ sedemikian hingga $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S$. Kita menuliskan relasi komposit dari R dan S sebagai **$S \circ R$**.

Dengan kata lain, jika relasi R mengandung pasangan (a, b) dan relasi S mengandung pasangan (b, c), maka $S \circ R$ mengandung pasangan (a, c).

Melakukan Kombinasi pada Relasi

Contoh: Tinjau relasi D dan S pada A = {1, 2, 3, 4}.

D = {(a, b) | b = 5 - a} "b sama dng (5 – a)"

S = {(a, b) | a < b} "a kurang dari b"

D = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

S = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

S∘D = { (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}

D memetakan anggota a ke anggota (5 – a), dan kemudian S memetakan (5 – a) ke semua anggota lebih dari (5 – a), menghasilkan

S∘D = {(a,b) | b > 5 – a} atau **S∘D = {(a,b) | a + b > 5}.**

Melakukan Kombinasi pada Relasi

Kita sudah mengetahui kalau **fungsi** hanyalah suatu **kasus kusus** dari **relasi** (yaitu relasi yang memetakan setiap anggota domain kepada tepat satu anggota codomain).

Jika kita mengkonversi dua fungsi menjadi relasi, yaitu, menuliskannya sebagai pasangan berurut, komposit dari relasi ini akan tepat sama dengan komposit dari fungsi (yang telah didefinisikan sebelumnya).

Melakukan Kombinasi pada Relasi

Definisi: Tinjau relasi R pada himpunan A. Pemangkatan relasi R^n, n = 1, 2, 3, …, didefinisikan secara induktif sebagai

$$R^1 = R$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

Dengan kata lain:

$$R^n = R \circ R \circ \ldots \circ R \quad \text{(R ditulis n kali)}$$

Melakukan Kombinasi pada Relasi

Teorema: Relasi R pada himpunan A adalah transitif jika dan hanya jika $R^n \subseteq R$ untuk semua bilangan bulat positif n.

Ingat definisi ke-transitif-an:

Definisi: Suatu relasi R pada himpunan A disebut transitif jika, untuk $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$ untuk $a, b, c \in A$.

Komposit dari R dengan dirinya sendiri mengandung (tepat) pasangan (a, c).

Karena itu, untuk relasi transitif R, $R \circ R$ tidak mengandung pasangan yang tidak ada di dalam R, jadi $R \circ R \subseteq R$.

Karena $R \circ R$ tidak memberikan pasangan baru yang tidak ada dalam R, maka adalah benar bahwa $(R \circ R) \circ R \subseteq R$, dst, sehingga $R^n \subseteq R$.

Melakukan Kombinasi pada Relasi

Contoh lain: Tinjau relasi X dan Y pada

A = {1, 2, 3, …}.

X = {(a, b) | b = a + 1}   "b sama dengan a tambah 1"

Y = {(a, b) | b = 3a}   "b sama dengan tiga kali a"

X = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), …}

Y = {(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), …}

X∘Y = { (1, 4), (2, 7), (3, 10), (4, 13), …}

Y memetakan a ke 3a, dan kemudian X memetakan 3a ke 3a + 1.

X∘Y = {(a,b) | b = 3a + 1}