Counting Lanjut

Relasi Rekurensi

Relasi rekurensi untuk deretan $\{a_n\}$ adalah persamaan yang menyatakan a_n kedalam satu atau lebih suku(-suku) sebelumnya, yaitu a_0, a_1, …, a_{n-1}, untuk seluruh bilangan bulat n, dengan $n \geq n_0$, dimana n_0 adalah bilangan bulat tak negatif.

Suatu deretan disebut sebagai **jawaban** dari relasi rekurensi jika suku-sukunya memenuhi relasi rekurensi tersebut.

Relasi Rekurensi

Dng kata lain, relasi rekurensi mirip dengan deretan yang didefinisikan secara rekursif, tetapi **tanpa menyebutkan nilai (kondisi) awalnya.**

Maka, relasi rekurensi bisa (dan biasanya) memiliki **banyak solusi (*multiple solution*).**

Jika, baik kondisi awal maupun relasi rekurensi diberikkan (**dua-duanya)**, maka deretan solusi-nya dapat ditentukan secara **unik**.

Relasi Rekurensi

Contoh:

Tinjau relasi rekurensi berikut

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \text{ untuk } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Apakah deretan $\{a_n\}$ dengan $a_n=3n$ merupakan solusi dari relasi rekurensi tsb ?

Untuk $n \geq 2$, dng substitusi $3n$ ke a_n, kita peroleh

$$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n-1)) - 3(n-2)$$
$$= 3n = a_n.$$

Jadi, $\{a_n\}$ dengan $a_n=3n$ adalah jawaban dari relasi rekurensi tsb.

Relasi Rekurensi

Apakah deretan $\{a_n\}$ dengan $a_n=5$ solusi dari relasi rekurensi tsb ?

Untuk $n \geq 2$ kita memperoleh

$$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot 5 - 5 = 5 = a_n.$$

Jadi, $\{a_n\}$ dengan $a_n=5$ juga jawaban dari relasi rekurensi tsb.

Pemodelan dg Relasi Rekurensi

Contoh:

Seorang nasabah menyimpan uang sebanyak \$10.000 di bank dengan suku bunga (majemuk) 5% pertahun. Berapa uang yang dimilikinya setelah 30 tahun ?

Jawaban:

Mis. P_n jumlah uang di tabungan setelah n tahun.

Bagaimana cara menghitung P_n jika P_{n-1} diketahui ?

Pemodelan dg Relasi Rekurensi

Kita bisa menurunkan **relasi rekurensi berikut**:

$$P_n = P_{n-1} + 0.05P_{n-1} = 1.05P_{n-1}.$$

Kondisi awalnya adalah $P_0 = 10,000$.

Sehingga diperoleh:

$$P_1 = 1.05P_0$$

$$P_2 = 1.05P_1 = (1.05)^2P_0$$

$$P_3 = 1.05P_2 = (1.05)^3P_0$$

…

$$P_n = 1.05P_{n-1} = (1.05)^nP_0$$

Kita sekarang punya **rumus** untuk menghitung P_n untuk tahun ke-n dan menghindari iterasi.

Pemodelan dg Relasi Rekurensi

Dengan menggunakan rumus tsb kita bisa memperoleh besarnya tabungan 30 tahun kemudian, P_{30}, jika tabungan awal (kondisi awal) diberikan; mis.

$$P_0 = 10,000$$

…

$$P_{30} = (1.05)^{30} \cdot 10,000 = 43,219.42$$

Jadi, setelah 30 tahun, tabungan tersebut akan menjadi $43,219.42.

Pemodelan dg Relasi Rekurensi

Contoh lain:

Andaikan a_n adalah jumlah bit string sepanjang *n* bit tanpa dua nol berurutan yang selanjutnya kita sebut sebagai “*valid strings*”. Tentukan relasi rekurensinya dan berikan kondisi awal untuk $\{a_n\}$.

Jawab:

Ide: Banyaknya *valid string* sama dengan banyaknya *valid string* yang berakhir dengan 0 ditambah dengan banyaknya *valid string* yang berakhir dengan 1.

Pemodelan dg Relasi Rekurensi

Kita asumsikan $n \geq 3$, sehingga string tsb mengandung sedikitnya 3 bit.

Selanjutnya kita asumsikan juga bahwa banyaknya *valid string* sepanjang (n-1) adalah a_{n-1}, dan banyaknya valid string dng panjang (n-2) adalah a_{n-2}.

1) Ada berapakah valid string sepanjang n, jika string tsb berakhiran dengan bit "1" ?

n=3-> n-1=2; dng vs={01,11}

Ada a_{n-1} string yang demikian, yaitu himpunan valid string sepanjang (n – 1) dengan bit 1 ditambahkan di akhir string tsb.

n=3-> vs={01<u>1</u>,11<u>1</u>}

Catatan: Menambah 1 pada *valid string* ini tidak mengubah status string tsb (masih valid string).

Pemodelan dg Relasi Rekurensi

2) Pertanyaan berikutnya: ada berapa *valid string* sepanjang n, jika string berakhir dengan “**0”**?

Valid string sepanjang n yang berakhir dengan 0 **haruslah memiliki bit 1 pada posisi ke (n – 1)** (jika tidak, maka string tsb akan berakhiran dengan 00 dan menjadi tidak valid lagi).

- –Dan ada berapa banyak *valid string* sepanjang (n – 1) yang berakhiran bit 1?

  n=3-> vs={01,11}

- –Kita tahu bahwa ada a_{n-1} buah string sepanjang n yang berakhiran bit 1.
- –Jadi, ada a_{n-2} buah string sepanjang (n – 1) yang berakhiran bit 1.

Pemodelan dg Relasi Rekurensi

Jadi ada a_{n-2} buah *valid string* sepanjang n yang berakhir dng bit 0 (semua *valid string* sepanjang (n – 2) dengan bit-bit 10 ditambahkan padanya).

n=3-> vs={01<u>0</u>,11<u>0</u>}

Banyaknya valid string adalah banyaknya valid string berakhiran 0 ditambah valid string berakhiran 1, sehingga kita mendapatkan **relasi rekurensi** sebagai berikut :

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Pemodelan dg Relasi Rekurensi

Maka,

$a_1 = 2$ (yaitu: 0 dan 1)

$a_2 = 3$ (yaitu: 01, 10, dan 11)

$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$

$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13$

…

Ternyata relasi rekurensi deretan ini seperti **deretan Fibonacci**.

Karena $a_1 = f_3$ dan $a_2 = f_4$, maka hubungan jumlah valid string dengan deretan Fibonacci diberikan oleh relasi:

$$a_n = f_{n+2}.$$

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Pada umumnya, kita menginginkan sebuah **rumus eksplisit** untuk mengitung a_n, alih-alih melakukan perhitungan secara iteratif.

Formula tersebut bisa diperoleh dengan cara sistematis untuk satu jenis relasi rekurensi tertentu,

yaitu relasi rekurensi yang mengekspresikan suatu suku didalam deretan sebagai **kombinasi linier** dari suku-suku sebelumnya.

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Definisi: Relasi rekurensi homogen derajat k dengan koefisien konstan adalah relasi rekurensi berbentuk:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k},$$

dimana $c_1, c_2, \ldots, c_k$ bilangan riil, dan $c_k \neq 0$.

Deretan yang memenuhi relasi rekurensi yang demikian dapat ditentukan secara unik dengan relasi rekurensi dan *k* kondisi awal

$a_0 = C_0, a_1 = C_1, a_2 = C_2, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}$.

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Contoh:

Relasi rekurensi $P_n = (1.05)P_{n-1}$
adalah relasi rekurensi linier homogen ber-**derajat satu**.

Relasi rekurensi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
adalah relasi rekurensi linier homogen **derajat dua**.

Relasi rekurensi $a_n = a_{n-5}$
adalah relasi rekurensi homogen linier **derajat lima**.

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Pada saat memecahkan relasi rekurensi yang demikian, kita mencari solusi berbentuk **$a_n = r^n$**, dimana r konstanta.

$a_n = r^n$ adalah jawaban dari relasi rekurensi
$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ jika dan hanya jika
$r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} + \ldots + c_kr^{n-k}$.

Kita bagi persamaan ini dengan r^{n-k} dan kurangkan kedua sisi dengan sisi kanan:

$r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \ldots - c_{k-1}r - c_k = 0$

Persamaan ini disebut sebagai **persamaan karakteristik** dari relasi rekurensi.

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Jawaban dari persamaan karakteristik disebut sebagai **akar karakteristik** dari relasi rekurensi.

Kita tinjau relasi rekurensi homogen linier **derajat dua**.

Teorema: Misalkan c_1 dan c_2 bilangan riil. Jika $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ mempunyai dua akar berbeda r_1 dan r_2, maka deretan $\{a_n\}$ adalah jawaban dari relasi rekurensi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ jika dan hanya jika $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$, dimana α_1 dan α_2 konstanta.

Bukti ada di buku referensi.

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Contoh: Tentukan jawaban dari relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dengan $a_0 = 2$ dan $a_1 = 7$?

Jawaban: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi tersebut adalah $r^2 - r - 2 = 0$.

Akarnya adalah $r = 2$ dan $r = -1$.

Maka, deretan $\{a_n\}$ adalah jawaban dari relasi rekurensi jika dan hanya jika:

$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$ untuk konstanta α_1 dan α_2 tertentu.

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Dengan persamaan $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$ dan kondisi awal $a_0 = 2$ dan $a_1 = 7$, diperoleh

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1)$$

Pemecahan kedua persamaan diatas memberikan $\alpha_1 = 3$ dan $\alpha_2 = -1$.

Jadi, jawaban relasi rekurensi dan kondisi awal adalah deretan $\{a_n\}$ dengan

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n.$$

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Contoh lain: Berikan rumus eksplisit bilangan Fibonacci.

Jawaban: Bilangan Fibonacci memenuhi relasi rekurensi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ dengan kondisi awal

$f_0 = 0$ dan $f_1 = 1$. Jadi, persamaan karakteristinyak adalah $r^2 - r - 1 = 0$.

Sedangkan akar-akar p.k. tsb adalah

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Dengan demikian, bilangan Fibonacci diberikan oleh

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

untuk konstanta α_1 dan α_2.

Kita bisa menentukan nilai konstanta ini sehingga deretan memenuhi persyaratan $f_0 = 0$ Dan $f_1 = 1$:

$$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$f_1 = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Solusi unik sistem dua persamaan dengan dan dua variabel ini adalah

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Akhirnya rumus eksplisit bilangan Fibonacci ditemukan:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Bagaimana jika persamaan karakteristik itu hanya memiliki satu akar ?

Bagaimana mencocokkan persamaan tsb dengan syarat awal a_0 dan a_1 ?

Teorema: Misalkan c_1 dan c_2 bilangan riil dimana $c_2 \neq 0$. Andaikan $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ hanya mempunyai satu akar r_0.
Deretan $\{a_n\}$ adalah jawaban dari relasi rekurensi

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ jika dan hanya jika
$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 \mathbf{n} r_0^n$, untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$, dimana α_1 dan α_2 adalah konstanta.

Memecahkan Persamaan Rekurensi

Contoh: Tentukan jawaban dari relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ dengan $a_0 = 1$ dan $a_1 = 6$?

Jawaban: Satu-satunya akar dari

$r^2 - 6r + 9 = 0$ adalah $r_0 = 3$.

Maka, jawaban dari relasi rekurensi ini adalah

$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$ untuk konstanta α_1 dan α_2.

Untuk memenuhi kondisi awal, diperlukan

$$a_0 = 1 = \alpha_1$$
$$a_1 = 6 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3$$

Pemecahan persamaan ini menghasilkan $\alpha_1 = 1$ dan $\alpha_2 = 1$. Akibatnya, solusi keseluruhan adalah

$$a_n = 3^n + n3^n.$$

Generalisasi

Order tinggi

THEOREM 3

Let $c_1, c_2, \ldots, c_k$ be real numbers. Suppose that the characteristic equation

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$$

has k distinct roots $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Then a sequence $\{a_n\}$ is a solution of the recurrence relation

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

if and only if

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$, where $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ are constants.

Contoh soal

Find the solution to the recurrence relation

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

with the initial conditions $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, and $a_2 = 15$.

Solusi

Solution: The characteristic polynomial of this recurrence relation is

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6.$$

The characteristic roots are $r = 1$, $r = 2$, and $r = 3$, because $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r-2)(r-3)$. Hence, the solutions to this recurrence relation are of the form

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n.$$

To find the constants α_1, α_2, and α_3, use the initial conditions. This gives

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ a_1 &= 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3, \\ a_2 &= 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9. \end{aligned}$$

When these three simultaneous equations are solved for α_1, α_2, and α_3, we find that $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, and $\alpha_3 = 2$. Hence, the unique solution to this recurrence relation and the given initial conditions is the sequence $\{a_n\}$ with

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

Latihan soal