Matriks

Matriks

Definisi. Matriks adalah susunan bilangan berbentuk persegiempat. Matriks dengan *m* buah baris dan *n* buah kolom disebut sebagai matriks ***m*×*n***.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2.5 & -0.3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

adalah matriks 3×2.

- Sebuah matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama disebut sebagai matriks bujursangkar.
- Dua buah matriks adalah **sama** jika mereka memilliki jumlah baris dan kolom yang sama dan elemen-elemen yang posisinya sama bernilai sama.

Matriks

Deskripsi umum sebuah matriks m×n A = [a_{ij}]:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

kolom ke-j

dari A

$$\left[a_{i1}, \quad a_{i2}, \quad \ldots, \quad a_{in}\right]$$

Baris ke-i dari A

Aritmetika Matriks

Penjumlahan Matriks

Definisi. Andaikan A = $[a_{ij}]$ dan B = $[b_{ij}]$ matriks $m \times n$. Penjumlahan A dan B, dituliskan sbg A+B, adalah matriks $m \times n$ dengan elemen ke (i,j) adalah $a_{ij} + b_{ij}$.
Dengan kata lain, $A+B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 8 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 14 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks

Definisi. Misalkan A sebuah matriks $m \times k$ dan B matriks $k \times n$. Hasil kali A dan B, dituliskan sebagai AB, adalah sebuah matriks dengan elemen ke-(i, j) nya sama dengan penjumlahan dari hasil perkalian baris ke-i dari A dan kolom ke-j dari B. Dengan kata lain, jika AB = $[c_{ij}]$, maka

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{t=1}^{k} a_{it}b_{tj}$$

Perkalian Matriks

Gambaran intuitif dari C = AB:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{3 \quad 0 \quad 1} \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

- Ambil kolom pertama dari B
- Putar 90° dan pasangkan dengan baris pertama dari A.
- Kalikan elemen-elemen yg bersesuaian dari A dan B dan jumlahkan hasil kalinya: $3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 9$
- Masukkan hasilnya kedalam posisi paling kiri atas dari C.

Perkalian Matriks

- Lanjutkan dengan perkalian kolom pertama B dengan baris ke dua, tiga, …, ke-m dari A untuk mendapatkan elemen-elemen pada baris pertama C.

- Ulangi proses ini untuk kolom ke dua, tiga, …, ke-n dari B untuk menghasilkan elemen pada kolom C sisa-nya.

-Setelah proses selesai, matriks baru C berisi hasil kali AB.

Perkalian Matriks

Tentukan C = AB

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 15 \\ 15 & 20 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriks Identitas

Definisi. Matriks identitas order-n adalah matriks $n \times n$, $I_n=[\delta_{ij}]$, dimana $\delta_{ij}=1$ jika $i=j$ dan $\delta_{ij}=0$ jika $i \neq j$:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Perkalian matriks A berukuran $m \times n$ dengan matriks identitas yang sesuai tidak mengubah matriks tsb:

$$AI_n = I_mA = A$$

Pangkat (Power) dan Transpose dari Matriks

Definisi. Jika A matriks $n \times n$ matrix, maka:

$A^0 = I_n$,
$A^r = AAA\ldots A$ (r-buah A)

Note: Fungsi pangkat hanya terdefinisi untuk matriks bujursangkar.

Definisi. Transpose dari matriks $m \times n$, $A = [a_{ij}]$, dituliskan sbg A^t, adalah matriks $n \times m$ yang diperoleh dengan menukarkan baris dengan kolom dari matriks A. Dengan kata lain, jika $A^t = [b_{ij}]$, maka $b_{ij} = a_{ji}$ untuk
$i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, m$.

Pangkat (Power) dan Transpose dari Matriks

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Matriks bujursangkar A disebut **simetrik** jika $A = A^t$. Jadi $A = [a_{ij}]$ adalah simetrik jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, m$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -9 \\ 3 & -9 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A adalah simetrik, sedangkan B tidak.

Matriks Boolean (Zero-One Matrices)

Sebuah matriks dengan elemen berharga 0 atau 1 disebut **matriks zero-one (matriks nol-satu/ matriks Boolean)**. Matriks biner ini sering dipakai sebagai “tabel” untuk me-representasikan struktur diskrit.

Kita dapat mendefinisikan operasi Boolean pada elemen-elemen matriks Boolean:

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Matriks Boolean

Mis. $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks Boolean berukuran $m \times n$.

Maka, **join (gabungan)** dari A dan B adalah matriks Boolean dengan elemen ke-(i, j)-nya $a_{ij} \vee b_{ij}$. Join dari A dan B dituliskan sebagai $A \vee B$.

Meet (pertemuan) dari A dan B adalah matriks Boolean dengan elemen ke-(i, j)-nya $a_{ij} \wedge b_{ij}$. Meet dari A dan B dituliskan sebagai $A \wedge B$.

Matriks Boolean

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Join:

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Meet:

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Boolean (zero-one)

Mis. $A = [a_{ij}]$ adalah matriks Boolean berukuran $m \times k$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks Boolean berukuran $k \times n$.

Definisi. Perkalian Boolean dari A dan B, dituliskan sebagai $A \circ B$, adalah sebuah matriks $m \times n$ dengan elemen ke- (i, j) adalah $[c_{ij}]$, dimana

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2i}) \vee \ldots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}).$$

Pada dasarnya, perkalian Boolean dilakukan seperti perkalian matriks biasa, tetapi perkalian digantikan dengan $\wedge$ dan penjumlahan digantikan dengan $\vee$.

Matriks Boolean

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \circ B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Boolean

Andaikan **A** sebuah matriks Boolean bujursangkar dan *r* adalah bilangan bulat positif.

Boolean power ke-r dari A adalah perkalian Boolean r-buah matriks A. Boolean power ke-r dari A dituliskan sebagai $A^{[r]}$.

$$A^{[0]} = I_n,$$
$$A^{[r]} = A \circ A \circ \ldots \circ A \qquad \text{(r kali)}$$