Representasi Bilangan Bulat

Representasi dari Bilangan Bulat

Teorema. Misalkan *b* adalah suatu bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1. Maka, jika *n* bilangan bulat positif, *n* dapat dinyatakan secara **unik** dalam bentuk:

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0,$$

dimana k adalah bilangan bulat tak negatif, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ adalah bilangan bulat tak negatif yang kurang dari b, dan $a_k \neq 0$.

Contoh: untuk basis *b*=10, kita bisa menyatakan sbb

$$859 = 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

Representasi dari Bilangan Bulat

Contoh untuk b=2 (ekspansi biner):

$$(10110)_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1$$
$$= (22)_{10}$$

Contoh untuk b=16 (ekspansi heksadecimal):

(kita gunakan A hingga F utk angka 10 sampai 15)

$$(3A0F)_{16} = 3 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^0$$
$$= (14863)_{10}$$

Representasi dari Bilangan Bulat

Bagaimana membuat ekspansi basis b dari integer n ?

Pertama-tama, bagi n dengan b untuk mendapatkan kuosien q_0 dan sisa a_0, yaitu,

$$n = bq_0 + a_0, \text{ dimana } 0 \leq a_0 < b.$$

Sisa a_0 menempati dijit paling kanan didalam basis b dari ekspansi n.

Berikutnya, bagi q_0 dengan b untuk memperoleh:

$$q_0 = bq_1 + a_1, \text{ dimana } 0 \leq a_1 < b.$$

a_1 adalah dijit kedua paling kanan pada basis b untuk ekspansi n. Proses ini diteruskan hingga dicapai kuosien sama dengan nol.

Representasi dari Bilangan Bulat

Contoh:

Berapakah ekspansi basis 8 dari $(12345)_{10}$?

Pertama, bagi 12345 dengan 8:

$$12345 = 8 \cdot 1543 + 1$$

$$1543 = 8 \cdot 192 + 7$$

$$192 = 8 \cdot 24 + 0$$

$$24 = 8 \cdot 3 + 0$$

$$3 = 8 \cdot 0 + 3$$

Hasilnya adalah: $(12345)_{10} = (30071)_8$.

Algoritma ekspansi basis *b*

```
procedure base_b_expansion(n, b: positive integers)
q := n
k := 0
while q ≠ 0
  begin
       a_k := q mod b
       q := ⌊q/b⌋
       k := k + 1
  end
{ekspansi basis b dari n adalah (a_{k-1} … a_1a_0)_b }
```

Penambahan Bilangan Bulat

Bagaimana kita menambahkan dua bilangan bulat ?

Contoh:

```
   111      carry
   7583
 + 4932
 ------
  12515
```

Ekspansi Biner:

$$
\begin{array}{rl}
 1\ \ 1\ \ \ & \text{carry} \\
 (1011)_2 & \\
 +\ (1010)_2 & \\
 \hline
 (10101)_2 &
\end{array}
$$

Penambahan Bilangan Bulat

Mis. $a = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0)_2$, $b = (b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1b_0)_2$.

Bagaimana bentuk dari algoritma penambahan dua bilangan biner ini ?

Pertama, jumlahkan bit paling kanan:

$$a_0 + b_0 = c_0 \cdot 2 + s_0,$$

dimana s_0 adalah bit paling kanan dalam ekspansi biner $a + b$, dan c_0 adalah **carry**.

Lalu, tambahkan pasangan berikutnya bersama-sama dengan carry:

$$a_1 + b_1 + c_0 = c_1 \cdot 2 + s_1,$$

dimana s_1 adalah bit berikutnya dalam ekspansi biner dari $a + b$, dan c_1 adalah carry.

Penambahan Bilangan Bulat

Proses tsb dilanjutkan hingga kita dapatkan c_{n-1}.

Bit terdepan (ter-kiri) dari hasil penjumlahan adalah

$$s_n = c_{n-1}.$$

Hasilnya adalah:

$$a + b = (s_n s_{n-1} \ldots s_1 s_0)_2$$

Penjumlahan Bilangan Bulat

Contoh:

Jumlahkan $a = (1110)_2$ dan $b = (1011)_2$.

$a_0 + b_0 = 0 + 1 = 0 \cdot 2 + 1$, shg $c_0 = 0$ dan $s_0 = 1$.

$a_1 + b_1 + c_0 = 1 + 1 + 0 = 1 \cdot 2 + 0$, shg $c_1 = 1$ dan $s_1 = 0$.

$a_2 + b_2 + c_1 = 1 + 0 + 1 = 1 \cdot 2 + 0$, shg $c_2 = 1$ dan $s_2 = 0$.

$a_3 + b_3 + c_2 = 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 2 + 1$, shg $c_3 = 1$ dan $s_3 = 1$.

$s_4 = c_3 = 1$.

Oleh karena itu, $s = a + b = (11001)_2$.

Algoritma Penjumlahan Bil. Bulat

```
procedure add(a, b: positive integers)
c := 0
for j := 0 to n-1
begin
      d := ⌊(a_j + b_j + c)/2⌋
      s_j := a_j + b_j + c – 2d
      c := d
end
s_n := c
{ekspansi biner dari hasil penjumlahan
adalah: s (s_n s_{n-1}…s_1 s_0)_2}
```