

ET-2001
Matematika Diskrit
Semester I 2015/2016

STEI-ITB

Bagian 1

Logika

- **Logika adalah suatu sistem yang didasarkan pada proposisi**
 - Berguna untuk melakukan penalaran matematika (*mathematical reasoning*)
 - Digunakan dalam mendesain rangkaian digital
- **PROPOSISI:**
 - “**Basic Building Block of Logic**”
 - Adalah sebuah pernyataan (*statement*) yang bisa bernilai **benar** (*true/T*) atau **salah** (*false/F*) tetapi **tidak** sekaligus keduanya.
- Dikatakan bahwa **nilai kebenaran** (*truth value*) dari sebuah proposisi adalah **benar** atau **salah**.
- Dalam rangkaian digital, nilai ini dinyatakan sebagai bilangan basis dua: **1** dan **0**

“Gajah lebih besar daripada tikus.”

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah/berapakah nilai kebenaran dari proposisi ini? BENAR

“520 < 111”

Apakah ini sebuah pernyataan?

YA

Apakah ini sebuah proposisi?

YA

Apakah/Bagaimana nilai kebenaran dari proposisi ini?

SALAH

$$“y > 5”$$

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? TIDAK

Nilai kebenaran dari pernyataan tersebut bergantung pada y , tetapi nilainya belum ditentukan.

Pernyataan jenis ini kita sebut sebagai **fungsi proposisi** atau **kalimat terbuka**

“Sekarang tahun 2014 dan $99 < 5$.”

Apakah ini sebuah pernyataan? YA

Apakah ini sebuah proposisi? YA

Apakah/Bagaimana nilai kebenaran dari proposisi ini? SALAH

“Tolong untuk tidak tidur selama kuliah”

Apakah ini sebuah pernyataan? **TIDAK**

Ini adalah sebuah permintaan.

Apakah ini sebuah proposisi? **TIDAK**

Hanya pernyataanlah yang bisa menjadi proposisi.

“ $x < y$ jika dan hanya jika $y > x$.”

Apakah ini pernyataan ?

YA

Apakah ini proposisi ?

YA

... karena nilai kebenarannya
tidak bergantung harga
spesifik x maupun y .

Apakah/Bagaimana nilai
kebenaran dari proposisi ini ?

BENAR

Menggabungkan Proposisi

Beberapa contoh terdahulu menunjukkan bahwa beberapa proposisi dapat digabungkan menjadi sebuah proposisi gabungan.

Hal ini kita formal-kan dengan melambangkan proposisi sebagai huruf-huruf seperti p , q , r , s , dan memperkenalkan berbagai operator logika.

Operator logika

Kita akan membahas operator-operator berikut:

- Negasi (NOT) (\neg)
- Konjungsi (AND) (\wedge)
- Disjungsi (OR) (\vee)
- Eksklusif OR (XOR) (\oplus)
- Implikasi (jika – maka) (\rightarrow)
- Bikondisional (jika dan hanya jika) (\leftrightarrow)

Tabel logika (*truth table*) dapat dipakai untuk menunjukkan cara operator-operator tsb diatas menggabungkan beberapa proposisi menjadi sebuah proposisi gabungan.

Negasi (NOT)

Operator Uner, Lambang: \neg

P	$\neg P$
Benar	Salah
Salah	Benar

Konjungsi (AND)

Operator Biner, Lambang: \wedge

P	Q	$P \wedge Q$
Benar	Benar	Benar
Benar	Salah	Salah
Salah	Benar	Salah
Salah	Salah	Salah

Disjungsi (OR)

Operator Biner, Lambang: \vee

P	Q	$P \vee Q$
Benar	Benar	Benar
Benar	Salah	Benar
Salah	Benar	Benar
Salah	Salah	Salah

Eksklusif Or (XOR)

Operator Biner, Lambang: \oplus

P	Q	$P \oplus Q$
Benar	Benar	Salah
Benar	Salah	Benar
Salah	Benar	Benar
Salah	Salah	Salah

Implikasi (jika - maka)

Operator Biner, Lambang: \rightarrow

P	Q	$P \rightarrow Q$
Benar	Benar	Benar
Benar	Salah	Salah
Salah	Benar	Benar
Salah	Salah	Benar

Bikondisional (jika dan hanya jika)

Operator Biner, Lambang: \leftrightarrow

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
Benar	Benar	Benar
Benar	Salah	Salah
Salah	Benar	Salah
Salah	Salah	Benar

Pernyataan dan Operasi

Pernyataan-pernyataan dan operator-operator dapat digabungkan untuk membentuk pernyataan baru.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
Benar	Benar	Salah	Salah	Salah
Benar	Salah	Salah	Benar	Benar
Salah	Benar	Benar	Salah	Benar
Salah	Salah	Benar	Benar	Benar

Pernyataan dan Operasi

Pernyataan-pernyataan dan operator-operator dapat digabungkan untuk membentuk pernyataan baru.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg (P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
Benar	Benar	Benar	Salah	Salah
Benar	Salah	Salah	Benar	Benar
Salah	Benar	Salah	Benar	Benar
Salah	Salah	Salah	Benar	Benar

Pernyataan-pernyataan yang ekuivalen

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$
Benar	Benar	Salah	Salah	Benar
Benar	Salah	Benar	Benar	Benar
Salah	Benar	Benar	Benar	Benar
Salah	Salah	Benar	Benar	Benar

Pernyataan $\neg(P \wedge Q)$ dan $(\neg P) \vee (\neg Q)$ adalah ekuivalen secara logis, karena bikondisional $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$ selalu benar.

Tautologi dan Kontradiksi

Suatu tautologi adalah pernyataan yang selalu bernilai **benar**

Contoh:

- $R \vee (\neg R)$
- $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$

Jika $S \rightarrow T$ sebuah tautologi, kita tulis $S \Rightarrow T$.

Jika $S \leftrightarrow T$ sebuah tautologi, kita tulis $S \Leftrightarrow T$.

Tautologi dan Kontradiksi

Suatu kontradiksi adalah pernyataan yang selalu bernilai **salah**

Contoh:

- $R \wedge (\neg R)$
- $\neg(\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q))$

Negasi dari sebarang tautologi adalah sebuah kontradiksi. Sebaliknya, negasi dari sebuah kontradiksi adalah sebuah tautologi.

Latihan

Kita tahu tautologi berikut:

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$$

Latihan di rumah (PR) !

Tunjukkan bahwa $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

Kedua tautologi ini disebut **Hukum De Morgan**.