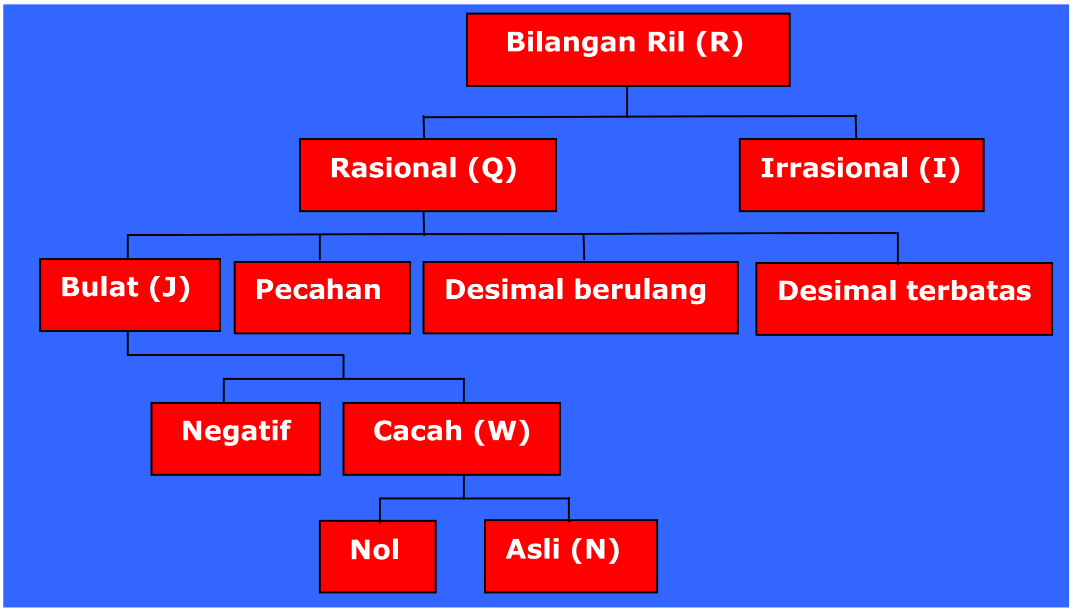
BAB I

PRA – KALKULUS

1.1 Sistem bilangan ril

1.1.1 Bilangan ril

Sistem bilangan ril adalah himpunan bilangan ril dan operasi aljabar yaitu operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Biasanya bilangan ril dinyatakan dengan lambang **R**. Operasi aljabar sering dinyatakan dengan operasi penjumlahan dan perkalian saja. Hal ini disebabkan operasi pengurangan dapat digantikan dengan operasi penjumlahan, sedangkan operasi pembagian dapat digantikan dengan operasi perkalian. Sebagai contoh jika a dan b adalah unsur bilangan ril, maka a - b dapat ditulis dalam bentuk a + (-b). Sedangkan $a \div b$ dapat ditulis dalam bentuk $a \cdot b^{-1}$.



Gambar 1.1

Gambar 1.1 adalah jenis-jenis bilangan ril. Untuk mendapatkan pengertian yang lebih jelas mengenai jenis - jenis bilangan ini, berikut diberikan rincian - rinciannya

Himpunan bilangan asli (N)

N = { 1, 2, 3, …. }

Himpunan bilangan cacah (W)

W = {0, 1, 2, 3, … }

Himpunan bilangan bulat (J)

J = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … }

Himpunan bilangan rasional (Q)

Himpunan bilangan radional adalah himpunan bilangan yang mempunyai bentuk p/q atau bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk p/q, dimana p dan q adalah anggota bilangan bulat dan $q \neq 0$

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \text{ dan } q \in J, q \neq 0 \right\}$$

Contoh 1.1
Buktikan bahwa bilangan-bilangan 3, (4,7) dan (2,5858…) adalah bilangan-bilangan rasional !
Bukti :

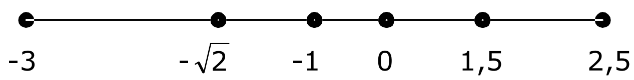
a) Bilangan 3 dapat ditulis dalam bentuk p/q yaitu : 3/1 atau 6/2 dan seterusnya.
b) Bilangan 4,7 dapat ditulis dalam bentuk : 47/10
c) Bilangan 2,5858… dapat ditulis dalam bentuk p/q dengan cara :

$$x = 2,5858\ldots$$
$$\underline{100\,x = 258,5858\ldots}$$
$$100\,x - x = 256$$
$$99\,x = 256 \rightarrow x = \frac{256}{99}$$

Jadi bilangan-bilangan 3, (4,7) dan (2,5858…) adalah bilangan-bilangan rasional.

1.1.2 Garis bilangan ril

Garis bilangan ril adalah tempat kedudukan titik-titik, dimana setiap titik menunjukkan satu bilangan ril tertentu yang tersusun secara terurut. Untuk menggambarkan garis bilangan ril,perhatikan Gambar 1.2. Pertama



Gambar 1.2
Garis bilangan ril

gambarkan garis horizontal dan tentukan titik nol. Selanjutnya kita tentukan titik-titik tempat kedudukan bilangan ril positif bulat disebelah kanan titik nol dengan ketentuan jarak antara titik 0 dan 1, titik 1 dan 2 atau 0 dan -1, -1 dan -2 dan seterusnya adalah sama. Tempat kedudukan bilangan ril lainnya disesuaikan dengan posisi bilangan-bilangan bulat.

1.1.3 Hukum-hukum bilangan ril

Operasi penjumlahan dan perkalian bilangan ril mematuhi hukum-hukum seperti yang disebutkan berikut ini :
Jika a dan b adalah bilangan-bilangan ril maka berlaku :

(i)	$a + b$	hukum penjumlahan
(ii)	$a \,.\, b$	hukum perkalian
(iii)	$a + b = b + a$	hukum komutatif penjumlahan
(iv)	$a \,.\, b = b \,.\, a$	hukum komutatif perkalian

Jika a, b dan c adalah bilangan-bilangan ril maka berlaku :

(v)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	hukum asosiatif penjumlahan
(vi)	$(ab) c = a (bc)$	hukum asosiatif perkalian
(vii)	$a (b + c) = ab + ac$	hukum distributif
(viii)	$a + 0 = 0 + a = a$	hukum penjumlahan nol
(ix)	$a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a$	hukum perkalian satu
(x)	$a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0$	hukum perkalian nol
(xi)	$a + (- a) = -a + a$	hukum invers penjumlahan
(xii)	$a \,.\, (1/a) = 1 ,\ a \neq 1$	hukum invers perkalian

Soal-soal

Diketahui : -10, 3/2, 7, 0, -12, 2, (2,14), 4/9, $\sqrt{6}$, (2,5353…), $\sqrt{10}$, (2,970492…)

Dari bilangan tersebut diatas, tentukan bilangan-bilangan a) bulat, b) cacah, c) rasional, d) irasional, e) ril positif, f) ril negatif dan g) asli serta gambarkan masing-masing garis bilangannya !

1.2 Bilangan kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang terdiri dari unsur bilangan ril dan imajiner. Bentuk umum bilangan kompleks adalah z = a + ib. Komponen a disebut bagian ril dan ditulis Re(z) dan b adalah bagian imajiner dan ditulis Im(z). Bilangan a dan b adalah bilangan-bilangan ril sedangkan i adalah bilangan imajiner yang besarnya adalah $\sqrt{-1}$.

Karena i = $\sqrt{-1}$, maka :

$i^2 = \sqrt{-1} . \sqrt{-1} = -1$

$i^3 = i^2 . i = - i$

$i^4 = i^2 . i^2 = 1$; dan seterusnya.

Dari keterangan diatas didapat :

$\sqrt{-2} = (\sqrt{2})(\sqrt{-1}) = \sqrt{2}\, i$; dan seterusnya.

1.2.1 Sifat-sifat bilangan kompleks

Misal $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka berlaku :

a) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$	sifat kesamaan
b) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$	sifat penjumlahan
c) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$	sifat pengurangan
d) $z_1 . z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$	sifat perkalian

1.2.2 Konjugat

Bila terdapat suatu bilangan kompleks z = x + iy, maka konjugat bilangan kompleks tersebut adalah $\bar{z}$ = x – iy. Jika bilangan kompleks berbentuk z = x – iy, maka konjugatnya adalah $\bar{z}$ = x + iy. Bila kita bandingkan kedua bilangan kompleks diatas dengan konjugatnya maka perbedaannya terletak pada komponen imajinernya. Jika komponen imajiner pada suatu bilanga kompleks adalah +iy maka komponen imajiner pada konjugatnya adalah –iy. Jika komponen imajiner pada bilangan kompleks adalah –iy, maka komponen imajiner pada konjugatnya adalah +iy. Sedangkan komponen ril baik pada bilangan kompleks maupun pada konjugatnya adalah sama. Selain ditulis dalam bentuk $\bar{z}$, konjugat suatu bilangan kompleks juga sering ditulis dalam bentuk z^*.

1.2.3 Perkalian bilangan kompleks dengan konjugatnya

Perkalian antara bilangan kompleks dengan konjugatnya dapat dijelaskan sebagai berikut :

Jika terdapat suatu bilangan kompleks z = x + iy maka konjugatnya adalah $\bar{z}$ = x – iy. Jadi perkalian bilangan kompleks dengan konjugatnya adalah :

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2$$

Dari hasil perkalian diatas kita dapat menyimpulkan bahwa perkalian bilangan kompleks dengan konjugatnya menghasilkan bilangan ril.

1.2.4 Pembagian dua buah bilangan kompleks

Untuk melakukan operasi pembagian dua buah bilangan kompleks pertama-tama kita kalikan pembilang dan penyebutnya (dalam hal ini z_1 dan z_2) dengan konjugat z_2. Sehingga didapat :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\,\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)}\,\frac{(x_2-iy_2)}{(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$\text{Jadi : } \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

Contoh 1.2

Diketahui : $z_1 = -5 + 7i$ dan $z_2 = 3 - 2i$

Tentukan : a) z_1+z_2 b) z_1-z_2 c) $z_1.z_2$ d) z_1/z_2 e) $z_1.\bar{z}_2$ f) $\bar{z}_1.z_2$

Penyelesaian :

Dari soal didapat bahwa : $x_1 = -5$; $y_1 = 7$; $x_2 = 3$; $y_2 = -2$

a) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (-5+3) + i(7+(-2)) = -2 + 5i$

b) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = (-5-3) + i(7-(-2)) = -8 + 9i$

c) $z_1 \,.\, z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$= ((-5)(3)-(7)(-2))+i((-5)(-2)+(3)(7))$

$= (-15 + 14) + i\,(10 + 21) = -1 + 31i$

d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

$= \frac{(-5)(3)+(7)(-2)}{3^2+(-2)^2} + i\,\frac{(3)(7)-(-5)(-2)}{3^2(-2)^2}$

$= \frac{-34}{13} + i\,\frac{11}{13}$

e) $z_1.\bar{z}_2 = (-5 + 7i)(3 + 2i) = -15 - 10i + 21i + 14i^2 = -29 + 11i$

f) $\bar{z}_1.z_2 = (-5 - 7i)\,(3 - 2i) = -15 + 10i - 21i + 14i^2 = -29 - 11i$

Soal-soal

1. Selesaikan soal-soal berikut :

a) $(3 + 5i) + (4 - 7i)$ d) $(-2 - 4i) - (-5 - 8i)$ g) $(2 - i)(5 + 3i)$

b) $(1 - 2i) + (-3 + 4i)$ e) $(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}i) - (\frac{2}{3} + \frac{5}{6}i)$ h) $(\frac{3}{4} - 3i)(\frac{3}{5} + \frac{3}{8}i)$

c) $(-6 + 3i) - (6 - 5i)$ f) $(5 + 4i)(7 + 3i)$ i) $\frac{2/3 + (3/4)i}{4/5 - (2/7)i}$

2. Jika $z_1 = -7 - 2i$ dan $z_2 = 4 + 5i$

Tentukan : a) $z_1\bar{z}_2$ b) $\bar{z}_1 z_2$

1.3 Pertaksamaan

Pertaksamaan adalah salah satu bentuk pernyataan matematika yang mengandung satu peubah atau lebih yang dihubungkan oleh tanda-tanda $<$, $>$, $\leq$ atau $\geq$. Ditinjau dari jumlah dan pangkat peubah maka pertaksamaan dapat dibagi menjadi pertaksamaan linier dengan satu peubah, pertaksamaan linier dengan peubah banyak dan pertaksamaan kuadrat. Jika terdapat suatu himpunan bilangan ril yang unsur-unsurnya dapat menggantikan peubah dari pertaksamaan maka himpunan bilangan tersebut disebut himpunan pengganti. Jika sebagian dari unsur himpunan pengganti menyebabkan pertaksamaan menjadi suatu pernyataan yang benar maka himpunan tersebut disebut himpunan jawab. Jika himpunan jawab dimisalkan A dan himpunan pengganti dimisalkan B maka $A \subset B$. Jika $A = B$ maka pertaksamaan dinamakan ketaksamaan.

Contoh 1.3
Dari pertaksamaan $1/x^2 > 1$
Himpunan pengganti atau B adalah $\{x \in R \mid x \neq 0\}$
Himpunan jawab atau A adalah $\{x \in R \mid -1 < x < 1, x \neq 0\}$. Jadi $A \subset B$

Contoh 1.4
Dari pertaksamaan $1/x^2 > 0$
Himpunan pengganti atau B adalah $\{x \mid x \in R, x \neq 0\}$
Himpunan jawab atau A adalah $\{x \mid x \in R, x \neq 0\}$. Karena $A = B$, maka $1/x^2 > 0$ disebut ketaksamaan.

1.3.1 Sifat-sifat pertaksamaan

(i) Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$
(ii) Jika $a > b$, maka $a + c > b + c$
(iii) Jika $a > b$, maka $a - c > b - c$
(iv) Jika $a > b$ dan c adalah bilangan positif, maka $ac > bc$
(v) Jika $a > b$ dan c adalah bilangan negatif, maka $ac < bc$

Dengan mengganti tanda > pada sifat-sifat diatas dengan tanda <, maka akan didapat sifat-sifat yang analog sebagai berikut :

(vi) Jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$
(vii) Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$
(viii) Jika $a < b$, maka $a - c < b - c$
(ix) Jika $a < b$ dan c adalah bilangan positif, maka $ac < bc$
(x) Jika $a < b$ dan c adalah bilangan negatif, maka $ac > bc$

Sifat-sifat pertaksamaan lainnya :

(xi) $ac > 0$ jika $a > 0$ dan $c > 0$ atau jika $a < 0$ dan $c < 0$
(xii) $ac < 0$ jika $a < 0$ dan $c > 0$ atau jika $a > 0$ dan $c < 0$
(xiii) $a/c > 0$ jika $a > 0$ dan $c > 0$ atau jika $a < 0$ dan $c < 0$
(xiv) $a/c < 0$ jika $a < 0$ dan $c > 0$ atau jika $a > 0$ dan $c < 0$
(xv) Jika $a > b$, maka $-a < -b$
(xvi) Jika $1/a < 1/b$, maka $a > b$
(xvii) Jika $a < b < c$, maka $b > a$ dan $b < c$ (bentuk komposit)

1.3.2 Selang (interval)

Selang adalah himpunan bagian dari bilangan ril yang mempunyai sifat relasi tertentu. Jika batas-batasnya merupakan bilangan ril maka dinamakan selang hingga. Jika bukan bilangan ril maka dinamakan selang tak hingga (∞). Lambang ∞ menyatakan membesar tanpa batas dan lambang $-\infty$ menyatakan mengecil tanpa batas. Contoh dari bermacam-macam selang dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Notasi	Definisi	Grafik	Keterangan
(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	$\overset{a}{(}$ ——— $\overset{b}{)}$ →	Selang terbuka
$[a,b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	$\overset{a}{[}$ ——— $\overset{b}{]}$ →	Selang tertutup
$[a,b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	$\overset{a}{[}$ ——— $\overset{b}{)}$ →	Selang setengah terbuka
$(a,b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	$\overset{a}{(}$ ——— $\overset{b}{]}$ →	Selang setengah terbuka
(a,∞)	$\{x \mid x > a\}$	$\overset{a}{(}$ ——— →	Selang terbuka
$[a,\infty)$	$\{x \mid x \ge a\}$	$\overset{a}{[}$ ——— →	Selang tertutup
$(-\infty,b)$	$\{x \mid x < b\}$	——— $\overset{b}{)}$ →	Selang terbuka
$(-\infty,b]$	$\{x \mid x \le b\}$	——— $\overset{b}{]}$ →	Selang tertutup
$(-\infty,\infty)$	**R**	——— →	Selang terbuka

1.3.3 Pertaksamaan linier satu peubah

Pertaksamaan linier satu peubah adalah pernyataan matematika yang memuat satu peubah yang mempunyai pangkat satu dan dihubungkan dengan tanda-tanda <, >, ≤ atau ≥. Bentuk umum dari pertaksamaan linier satu peubah adalah :ax + b (?) 0, dimana a dan b adalah konstan, sedangkan (?) adalah salah satu dari tanda-tanda <, >, ≤ atau ≥.

Contoh 1.5

Selesaikan pertaksamaan 7x + 9 < -5

Penyelesaian :

7x + 9 < -5 → semua ruas dikurang 9 →7x + 9 – 9 < -5 – 9

7x < -14

1/7 (7x) < 1/7 (-14) → semua ruas dikalikan 1/7 → x < -2

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah : $\{x \mid x < -2\}$

——— $\underset{-2}{)}$ ——→

selang terbuka

Gambar 1.3

Contoh 1.6

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertaksamaan 1 + 4x < 2x + 9

Penyelesaian :

1 + 4x < 2x + 9

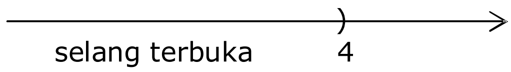
1 + 4x – (1 + 2x)< 2x + 9 – (1 + 2x) → semua ruas dikurang (1+2x)

2x < 8

1/2 (2x) < 1/2 (8) $\rightarrow$ semua ruas dikalikan 1/2

x < 4

Himpunan penyelesaiannya adalah : $\{x \mid x < 4\}$



Gambar 1.4

Untuk kesederhanaan, penyelesaian pertaksamaan linier satu peubah dapat diselesaikan dengan cara mengelompokkan peubah pada salah satu ruas dan mengelompokkan konstan pada ruas lainnya. Ingat, setiap memindahkan suku pada ruas yang berbeda tandanya akan berubah !

Contoh 1.7

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertaksamaan 3x -2 $\geq$ 8 + 5x

Penyelesaian :

3x -2 $\geq$ 8 + 5x $\rightarrow$ Pidahkan 5x keruas kiri dan -2 keruas kanan

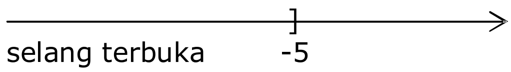
3x – 5x $\geq$ 8 + 2 $\rightarrow$ Kelompokkan peubah x pada ruas kiri dan kelompokkan konstan pada ruas kanan.

-2x $\geq$ 6

(-1/2)(-2x)$\leq$ (10)(-1/2) $\rightarrow$ Jika mengalikan setiap ruas dengan bilangan negatif maka tanda pertaksamaan harus dibalik. Lihat sifat pertaksamaan (xv).

x $\leq$ -5

Himpunan penyelesaiannya adalah : $\{x \mid x \leq -5\}$



Gambar 1.5

Contoh 1.8

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertaksamaan 4 < $\frac{4-2x}{5}$ < 2x – 1

Penyelesaian :

4 < $\frac{4-2x}{5}$ < 2x – 1

4 < $\frac{4-2x}{5}$ < 2x – 1 $\rightarrow$ Kalikan semua ruas dengan 5

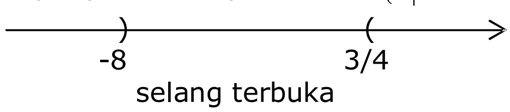
(4)(5)< (5)$\frac{4-2x}{5}$ < (5)(2x – 1)

20 < 4 – 2x <10x – 5 $\rightarrow$ Dapat dipecah menjadi dua bagian, yaitu 4 – 2x > 20 dan 4 – 2x < 10x -5. (perhatikan sifat pertaksamaan xvii).

Setelah dipecah menjadi dua pertaksamaan, selesaikan satu persatu.

4 – 2x > 20	4 – 2x < 10x -5
2x < 4 – 20	12x >9
x < -8	x > 3/4

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah : $\{x \mid x < -8 \text{ atau } x > 4\}$



Gambar 1.6

Soal-soal

Selesaikan pertaksamaan :

1. $2x + 6 \le 5x - 9$
2. $\frac{1}{2} + 5x < \frac{3}{5} - 6x$
3. $\frac{1}{5}(8x - 3) > x + 1$
4. $\frac{5-2x}{3} > \frac{2+x}{5}$
5. $6 \ge \frac{2-x}{9} \ge 5$
6. $\frac{1}{5} > \frac{3-2x}{7} > \frac{1}{6}$

1.3.4 Nilai mutlak

Nilai mutlak dari x dinyatakan dengan $|x|$ dan didefinisikan sebagai :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \ge 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Teorema-teorema

Jika a dan b adalah bilangan ril, maka :

(i) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

(ii) $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ atau $x < -a$

(iii) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$

(iv) $|x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a$ atau $x \le -a$

(v) $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ atau $x = -a$

(vi) $|ab| = |a||b|$. Bukti : $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$ (terbukti)

(vii) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$. Bukti : $\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left[\frac{a}{b}\right]^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$ (terbukti)

(viii) $|a + b| \le |a| + |b|$ (ketaksamaan segitiga)

Bukti : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$

$\sqrt{(a+b)^2} \le \sqrt{(|a| + |b|)^2} = ||a| + |b|| = |a| + |b|$

Telah diketahui bahwa : $\sqrt{(a+b)^2} = |a + b|$.

Jadi $|a + b| \le |a| + |b|$ (terbukti)

(ix) $|a - b| \le |a| + |b|$

Bukti: $|a - b| = |a + (-b)| \le |a| + |(-b)| = |a| + |b|$. Jadi $|a - b| \le |a| + |b|$ (terbukti)

(x) $|a| - |b| \le |a - b|$

Bukti : $|a| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b|$

Jika setiap suku dikurangi dengan $|b|$, maka $|a| - |b| \le |a - b|$ (terbukti)

Contoh 1.9

Selesaikan pertaksamaan $|x - 5| \le 4$, gambarkan garis bilangan dan selangnya

Penyelesaian :

$|x - 5| \le 4 \rightarrow -4 \le x-5 \le 4$ (lihat teorema iii)

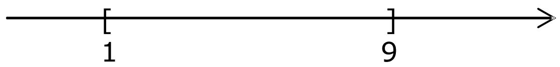
Dengan memperhatikan sifat pertaksamaan xvii halaman 6, maka kita dapatkan dua buah pertaksamaan, yaitu : $x - 5 \ge -4$ dan $x - 5 \le 4$.

Selanjutnya kita selesaikan satu persatu persamaan tersebut.

$x - 5 \ge -4 \quad \rightarrow \quad x \ge 1$

$x - 5 \le 4 \quad \rightarrow \quad x \le 9$

Jadi himpunan penyelesaian pertakasamaan adalah : $\{x \mid 1 \le x \le 9\}$



selang tertutup
Gambar 1.7

Contoh 1.10
Selesaikan pertaksamaan $|x-7| > 3$, gambarkan garis bilangan dan selangnya

Penyelesaian :

$|x-7| > 3 \quad \rightarrow \quad -3 > x - 7 > 3$ (lihat teorema iii)

Dengan memperhatikan sifat pertaksamaan xvii halaman 6, maka kita dapatkan dua buah pertaksamaan, yaitu : $x-7 < -3$ dan $x-7 > 3$.

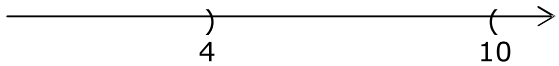
Selanjutnya kita selesaikan satu persatu persamaan tersebut.

$x-7 < -3 \quad \rightarrow \quad x < 4$

$x-7 > 3 \quad \rightarrow \quad x > 10$

Jadi himpunan penyelesaian pertakasamaan adalah :

$\{x \mid x < 4 \text{ atau } x > 10\}$



selang terbuka
Gambar 1.8

Soal-soal
Selesaikan pertaksamaan :

1. $|x+8| < 2$
2. $|6-2x| \geq 7$
3. $|5+6x| > 12$
4. $|3x+2| \leq 5$
5. $\left|\dfrac{4x-5}{3}\right| > 6$
6. $\left|\dfrac{7+6x}{4}\right| \leq 3$

1.3.5 Pertaksamaan linier dua peubah

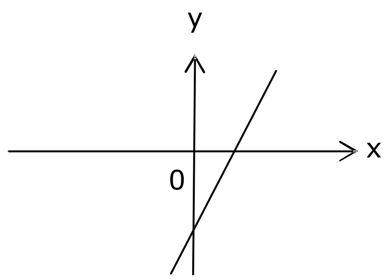
Bentuk umum pertaksamaan linier dua peubah adalah : ax + by + c (?) 0 ; konstanta-konstanta a, b dan c adalah bilangan-bilangan ril dan $a \neq 0$. Tanda (?) adalah salah satu dari tanda <, >, ≤ atau ≥. Untuk membantu mahasiswa dalam menggambarkan grafik pertaksamaan linier dua peubah, berikut diberikan prosedurnya.

1. Ganti tanda pertaksamaan dengan tanda sama dengan dan selanjutnya gambarkan grafik persamaan linier yang dimaksud. Setelah digambar kita akan melihat bahwa grafik persamaan linier adalah garis yang membagi bidang menjadi dua bagian.
2. Jika pada pertaksamaan menggunakan tanda ≤ atau ≥ berarti garis tersebut termasuk pada grafik yang akan digambarkan. Selanjutnya garis tersebut digambarkan secara penuh. Jika pertaksamaan menggunakan tanda < atau > berarti garis tersebut tidak termasuk pada grafik yang akan digambarkan. Selanjutnya garis tersebut digambarkan putus-putus.
3. Pilih salah satu titik koordinat pada masing-masing bidang dan kemudian substitusikan pada pertaksamaan. Jika substitusi tersebut menghasilkan pernyataan yang benar berarti bidang tempat kedudukan titik tersebut adalah bidang yang dimaksud. Sebaliknya jika substitusi menghasilkan pernyataan yang salah maka bidang tempat kedudukan titik tersebut bukan

bidang yang dimaksud. Untuk keseragaman bidang yang memenuhi pertaksamaan diarsir. Akan menjadi lebih sederhana jika kita memilih titik koordinat (0,0) asalkan titik koordinat tersebut tidak dilalui oleh garis.

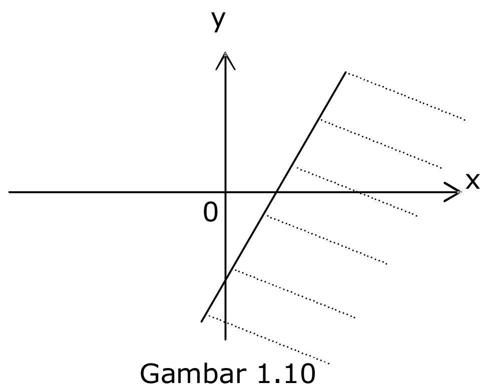
Contoh 1.11
Gambarkan grafik pertaksamaan $3x - 2y \geq 8$
Penyelesaian :
Langkah 1.
Ganti tanda pertaksamaan menjadi tanda sama dengan $\rightarrow$ $3x - 2y = 8$

Langkah 2.
Gambarkan grafiknya.



Gambar 1.9

3. Memilih titik koordinat.
   Pilih satu titik koordinat yaitu (0,0) dan substitusikan ke pertaksamaan. Ternyata substitusi ini menghasilkan pernyataan yang salah. Berarti bidang tempat kedudukan titik koordinat tersebut bukan bidang yang dicari. Sehingga bidang disebelahnya merupakan bidang yang dicari. Selanjutnya bidang tersebut diarsir.

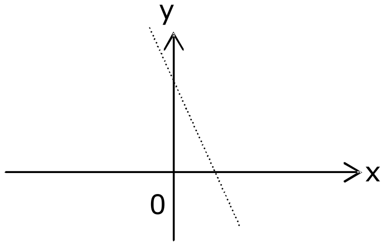


Gambar 1.10

Contoh 1.12
Gambarkan grafik pertaksamaan $5x + 3y < 6$
Penyelesaian :

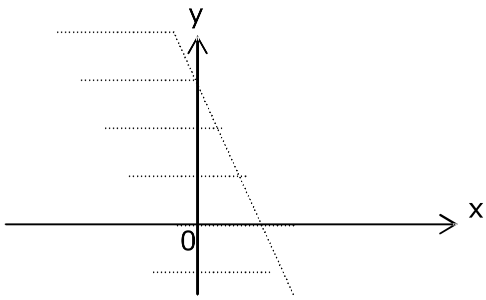
Langkah 1.
Ganti tanda pertaksamaan menjadi tanda sama dengan $\rightarrow$ $5x + 3y = 6$

Langkah 2.
Gambarkan grafiknya.



Gambar 1.11

Langkah 3
Memilih titik koordinat.
Pilih satu titik koordinat yaitu (0,0) dan substitusikan ke pertaksamaan. Ternyata substitusi ini menghasilkan pernyataan yang benar. Berarti bidang tempat kedudukan titik koordinat tersebut merupakan bidang yang dicari. Sehingga bidang disebelahnya bukan bidang yang dicari. Selanjutnya arsir yang dicari tersebut.



Gambar 1.12

Soal-soal
Gambarkan grafik dari pertaksamaan-pertaksamaan berikut !

1. $x + y < 3$
2. $y + 2x > 4$
3. $4x - 5y \leq 6$
4. $5y + 3x \geq 1$

Sistem pertaksamaan linier

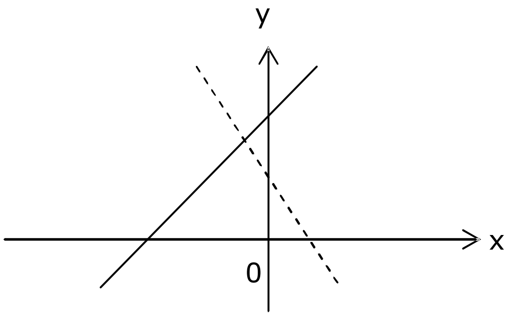
Dalam penerapannya sering terdapat lebih dari satu pertaksamaan yang harus diselesaikan secara serentak. Pertaksamaan-pertaksamaan tersebut dinamakan "sistem pertaksamaan linier". Dalam pembahasan sistem per- taksamaan linier kita hanya akan membahas sistem pertaksamaan linier yang mempunyai tidak lebih dari peubah.
Langkah-langkah penyelesaian sistem pertaksamaan linier.

1. Ganti semua tanda pertaksamaan menjadi tanda sama dengan.
2. Gambarkan grafiknya.
3. Periksa salah satu titik koordinat pada bidang. Jika menghasilkan pernyataan yang benar, berarti bidang tersebut adalah bidang yang dicari.

Contoh 1.13
Gambarkan grafik sistem pertaksamaan $2y + 3x < 5$ dan $x - y \geq -3$
Penyelesaian :
Langkah 1.

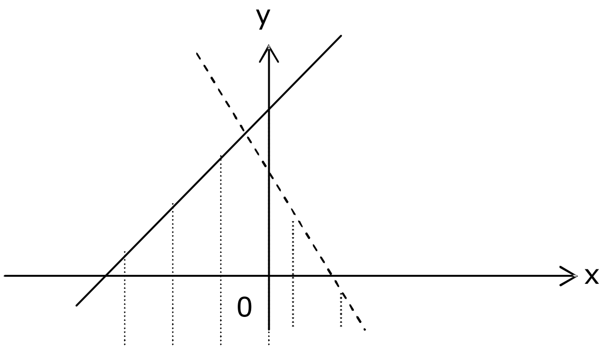
$$2y + 3x = 5$$
$$x - y = -3$$

Langkah 2.



Gambar 1.13

Langkah 3.
Periksa koordinat (0,0). Setelah dilakukan substitusi harga x=0 dan y=0 kedalam sistem pertaksamaan ternyata menghasilkan pernyataan yang benar. Berarti bidang tempat kedudukan titik tersebut adalah bidang yang dicari. Selanjutnya bidang tersebut diarsir.

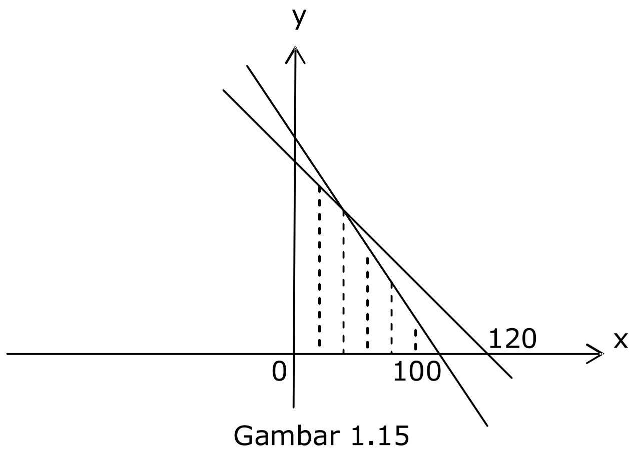


Gambar 1.14

Contoh 1.14 (penerapan sistem pertaksamaan linier)
Sebuah pabrik kendaraan bermotor akan memproduksi dua jenis kendaraan yaitu jenis diesel dan bensin. Biaya pembuatan jenis kendaraan diesel adalah Rp. 100 juta/kendaraan, sedangkan untuk jenis kendaraan bensin adalah Rp. 80 juta /kendaraan. Jika pabrik tersebut mempunyai kemampuan produksi 120 kendaraan setiap bulan dan dan untuk pembuatan kedua jenis kendaraan tersebut tidak lebih dari Rp 10 milyar / bulan, tentukan bentuk pertaksamaan dari persoalan diatas dan gambarkan grafiknya.
Penyelesaian:

	Diesel (juta rupiah)	Bensin (juta rupiah)	Nilai batas (juta rupiah)
Biaya	Rp. 100.000.000,00	Rp. 80.000.000,00	Rp.10 milyar
Jumlah	x	y	120

100 juta . x + 80 juta . y $\leq$ 10.000 juta atau :100 x + 80 y $\leq$ 10.000
x + y $\leq$ 120
x $\geq$ 0 ; y $\geq$ 0



Gambar 1.15

Soal-soal

Gambarkan grafik dari pertaksamaan linier berikut :

1. $\begin{cases} x + 3y \le 9 \\ x - 2y > 6 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + 2y \ge 4 \\ x - y < 3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x + y \le 4 \\ x - 2y \ge 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x + y \le 8 \\ x + y \le 6 \\ x \ge 0 \text{ dan } y \ge 0 \end{cases}$

5. Sebuah industri komputer akan memproduksi sekurang-kurangnya 1000 buah komputer yang terdiri dari dua jenis yaitu jenis PC dan Laptop. Diperkirakan biaya untuk memproduksi sebuah PC adalah Rp. 4.000.000,00 sedangkan untuk memproduksi Laptop adalah Rp. 6.000.000,00. Jika dana yang tersedia untuk memproduksi kedua jenis komputer tersebut adalah Rp. 10 milyar rupiah tentukan sistem pertaksamaan linier dari persoalan diatas dan gambarkan grafiknya !.

1.3.7 Pertaksamaan kuadrat

Bentuk umum dari pertaksamaan kuadrat adalah : $ax^2 + bx + c$ (?) 0, dimana a, b dan c adalah bilangan-bilangan ril dan $a \neq 0$ Sedangkan (?) adalah salah satu dari tanda <, >, ≤, atau ≥. Penyelesaian dari pertaksamaan adalah menentukan harga-harga peubah yang memenuhi pertaksamaan.

Contoh 1.15

Selesaikan pertaksamaan $x^2 - 7x + 12 > 0$

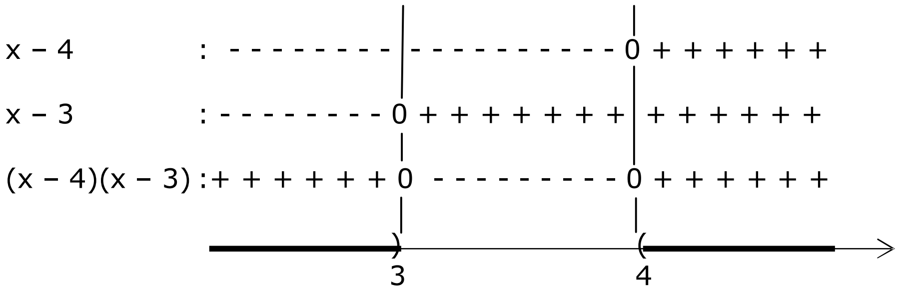
Penyelesaian :

Lakukan pemaktoran terhadap pertaksamaan :

$x^2 - 7x + 12 > 0 \quad \rightarrow \quad (x - 4)(x - 3) > 0$

Titik-titik kritis adalah 3 dan 4

Grafik pertaksamaan :



Gambar 1.16

Dari gambar diatas didapat bahwa daerah yang memenuhi pertaksamaan adalah x<3 atau x >4.

Contoh 1.16

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertaksamaan : $\frac{10}{x-2} \leq 2(x+2)$

Penyelesaian :

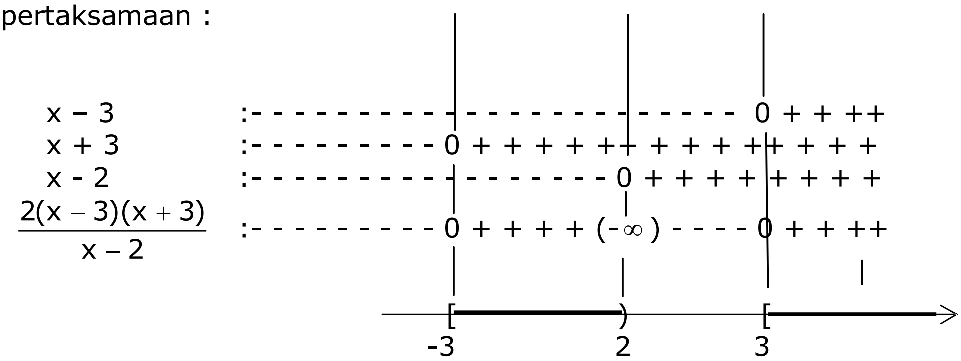
$$\frac{10}{x-2} \leq 2(x+2) \rightarrow \frac{10}{x-2} \leq \frac{2(x+2)(x-2)}{x-2} \rightarrow \frac{10}{x-2} \leq \frac{2(x^2-4)}{x-2}$$

$$\frac{10}{x-2} \leq \frac{2x^2-8}{x-2} \rightarrow \frac{2x^2-8-10}{x-2} \geq 0 \rightarrow \frac{2x^2-18}{x-2} \geq 0 \rightarrow \frac{2(x^2-9)}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{2(x-3)(x+3)}{x-2} \geq 0$$

Titik-titik kritis adalah -3, 2 dan 3

Grafik pertaksamaan :



Gambar 1.17

Himpunan penyelesaiannya adalah : $\{x \mid -3 \leq x < 2 \text{ atau } x \geq 3\}$

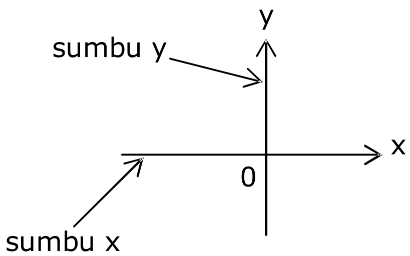
Soal-soal

Selesaikan pertaksamaan berikut dan tentukan selangnya !

1. $(x + 2)(x - 3) > 0$
2. $(x - 4)(x + 5) < 0$
3. $x(x + 6) \geq 0$
4. $(x - 7)x \leq 0$
5. $x^2 + 4x - 5 < 0$
6. $x^2 > 5x - 6$
7. $7x - 12 \leq x^2$
8. $x^2 + 21 \geq 10x$

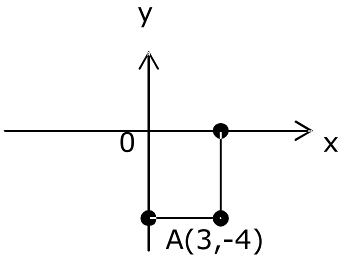
1.4 Koordinat Kartesius

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering membuat hubungan antara satu besaran dan besaran lainnya. Contohnya adalah untuk membeli sejumlah barang kita harus mengeluarkan sejumlah uang, pengukuran temperatur pada suatu tabung berhubungan dengan tekanan didalamnya dan masih banyak contoh lainnya lagi. Contoh-contoh diatas adalah hubungan dua besaran yang akan menghasilkan pasangan terurut bilangan ril. Jika pasangan terurut bilangan tersebut disimbolkan dengan x (untuk bilangan pertama) dan y (untuk bilangan kedua) maka kita dapat menuliskan pasangan bilangan terurut dengan (x,y). Setiap pasangan terurut bilangan ril disebut titik dan dinyatakan dengan **R**. Sedangkan himpunan pasangan terurut bilangan ril disebut bidang bilangan dan disimbolkan dengan $\mathbf{R}^2$. Bidang bilangan dpt. Digambarkan dengan bantuan koordinat Kartesius. Untuk menggambarkan koordinat



Gambar 1.18
Koordinat Kartesius

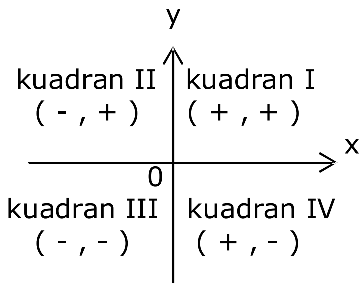
kartesius pertama-tama kita gambarkan dua buah garis yang saling tegak lurus, seperti pada Gambar 1.18. Garis tegak lurus adalah sumbu y atau ordinat, sedangkan garis horizontal disebut sumbu x atau absis. Titik potong kedua garis tsb. adalah titik asal (origin) dan dilambangkan dengan 0. Sumbu x yang berada disebelah kanan titik asal menunjukkan arah positif sedangkan disebelah kiri adalah arah negatif. Sumbu y yang berada diatas titik asal adalah arah positif sedangkan yang berada dibawahnya adalah arah negatif. Pasangan kedua sumbu x dan y adalah koordinat Kartesius. Jika suatu pasangan terurut bilangan ril (x_0 , y_0) menunjukkan titik A (ditulis A (x_0 , y_0)), maka (x_0 , y_0) disebut koordinat titik A.Sebagai contoh bila harga x_0 =3 dan harga y_0 = -4, maka titik A dapat ditentukan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.19.



Gambar 1.19
Titik koordinat

Kuadran-kuadran

Bila kita perhatikan koornat Kartesius maka akan terlihat empat buah bidang. Bidang-bidang tersebut disebut kuadran-kuadran yang terdiri dari kuadran I, II, III dan IV. Pembagian dari kuadran-kuadran tersebut dapat dilihat padda Gambar 1.20 dibawah ini.



Gambar 1.20
Kuadran-kuadran
pada koordinat Kartesius

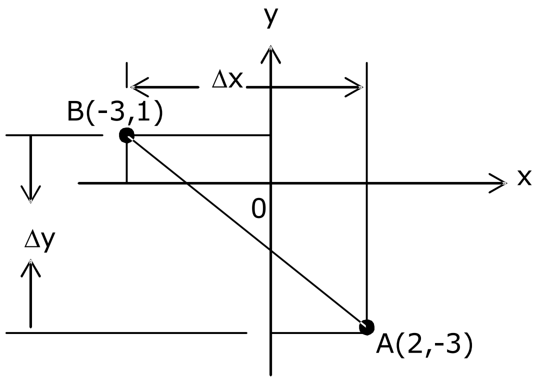
Soal-soal

Diketahui koordinat-koordinat :

1. (2 , 3)	3. (-5 , -6)	5. (-3 , 7)
2. (4 , -5)	4. (-1 , 6)	6. (-3,1)

1.5 Pertambahan dan jarak

Jika sebuah partikel bergerak dari suatu titik $P_1(x_1,y_1)$ ke titik $P_2(x_2,y_2)$ maka dikatakan bahwa koordinat partikel tersebut mengalami pertambahan sebesar Δx dan Δy. Sebagai contoh, bila suatu partikel bergerak dari titik A(2,-3) ke B(-3 ,1)



Gambar 1.21
Gerak partikel dari titik A ke B

(lihat Gambar 1.21) maka pertambahannya adalah :

$\Delta x = x_2 - x_1 = -3 - 2 = -5$

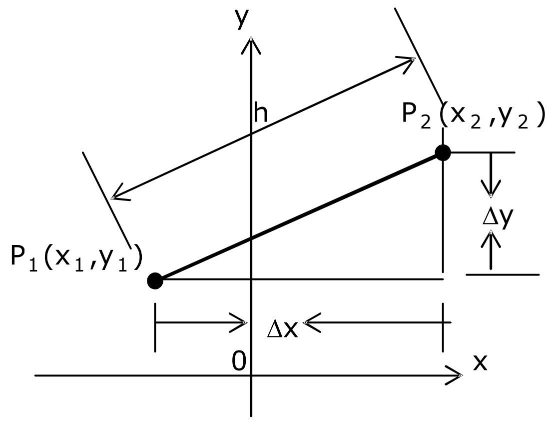
$\Delta y = y_2 - y_1 = 1 - (-3) = 4$

Dari contoh diatas dapat disimpulkan bahwa pertambahan pada suatu koordinat adalah perubahan netto, yaitu :

$$\begin{cases} \Delta x = x_{\text{titik akhir}} - x_{\text{titik awal}} \\ \Delta y = y_{\text{titik akhir}} - y_{\text{titik awal}} \end{cases} \qquad (1.1)$$

1.5.1 Jarak antara dua titik

Apabila sumbu-sumbu koordinat menggunakan satuan pengukuran yang sama maka jarak antara dua buah titik pada suatu bidang tertentu dapat ditrntukan dengan menggunakan kombinasi antara pertambahan-pertambahan koordinat dan teorema Pythagoras, seperti yang ditunjukkan Gambar 1.22 berikut.



Gambar 1.22
Jarak dua titik

$\Delta x = x_2 - x_1 = -3 - 2 = -5$
$\Delta y = y_2 - y_1 = 1 - (-3) = 4$

Dari teorema Pythagoras didapat :

$$\boxed{\text{Jarak } P_1P_2 = d(P_1P_2) = h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad (1.2)}$$

Contoh 1.17
Tentukan jarak dari pasangan koordinat berikut :
a) $P_1 = (-4,3)$ dan $P_2 = (2,1)$
b) $P_1 = (-2,-2)$ dan $P_2 = (5,1)$
Penyelesaian :
a) $\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - (-4) = 6$; $\Delta y = y_2 - y_1 = 1 - 3 = -2$

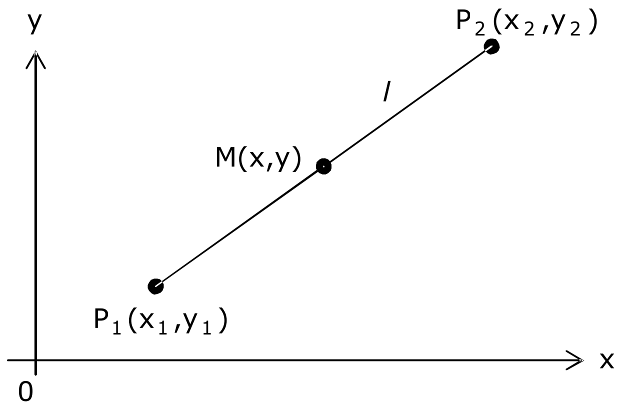
$$\text{Jarak } P_1P_2 = d(P_1P_2) = h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

b) $\Delta x = x_2 - x_1 = 5 - (-2) = 7$; $\Delta y = y_2 - y_1 = 1 - (-2) = 3$

$$\text{Jarak } P_1P_2 = d(P_1P_2) = h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(7)^2 + (3)^2} = \sqrt{58}$$

1.5.2 Titik tengah

Jika terdapat sebuah garis L (lihat Gambar 1.23) yang mempunyai titik pangkal $P_1(x_1, y_1)$, titik ujung $P_2(x_2, y_2)$ dan titik tangah M(x,y), maka koordinat titik tengah garis tersebut dapat ditentukan sebagai berikut :



Gambar 1.23
Titik tengah garis

$$d(P_1, M) = d(M, P_2) \rightarrow \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2$$

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1 = x_2^2 - 2x_2x + x^2 + y_2^2 - 2y_2y + y^2$$

$$x^2 + x_1^2 + y^2 + y_1^2 - x_2^2 - x^2 - y_2^2 - y^2 = -2x_2x - 2y_2y + 2xx_1 + 2yy_1$$

$$x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = -2x_2x - 2y_2y + 2xx_1 + 2yy_1$$

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 2xx_1 - 2x_2x - 2y_2y + 2yy_1$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2x(x_1 - x_2) + 2y(y_1 - y_2)$$

Dari persamaan diatas didapat :

$x_1 + x_2 = 2x \rightarrow x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

$y_1 + y_2 = 2y \rightarrow y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Jadi koordinat titik tengah garis adalah $M(x,y) = \left\{\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right\}$ (1.3)

Soal-soal

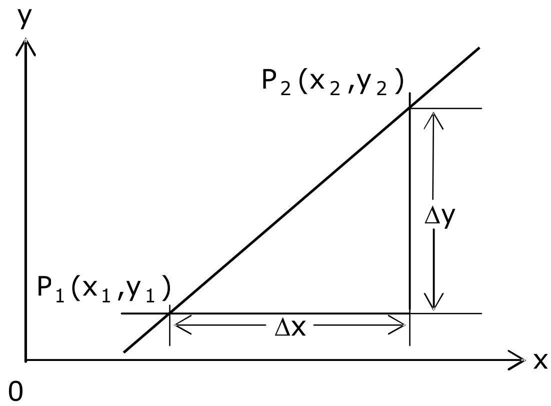
Diketahui koordinat-koordinat :

1. (2,0) dan (4,5)
2. (5,1) dan (1,3)
3. (-3,-2) dan (3,3)
4. (-2,1) dan (3,-2)

Tentukan jarak masing-masing koordinat dan titik tengahnya !

1.6 Kemiringan garis

Kemiringan didefinisikan sebagai ukuran laju perubahan koordinat dari titik-titik yang terletak pada suatu garis.Misal dua buah titik yaitu $P_1(x_1,y_1)$ dan $P_2(x_2,y_2)$ terletak pada suatu garis *l*, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.24 berikut ini.



Gambar 1.24
Titik tengah garis

Dari persamaan 1.1 didapat $\Delta x = x_2 - x_1$ dan $\Delta y = y_2 - y_1$. Dengan mengacu pada definisi, maka kemiringan garis atau koeffisien arah (sering disimbolkan dengan lambang m) adalah :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1.4)$$

Contoh 1.19

Tentukan kemiringan atau koeffisien arah garis yang melalui titik (0,5) dan (6,1).

Penyelesaian :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{6-0} = -\frac{2}{3}$$

1.7 Dua garis sejajar

Dua buah garis dikatakan sejajar bila kedua garis tersebut tidak mempunyai titik potong untuk sembarang koordinat (x,y). Misal pada garis l_1 terdapat titik-titik

$P_1(x_1,y_1)$ dan $P_2(x_2,y_2)$ serta pada garis l_2 terdapat titik-titik $P_1'(x_1',y_1')$ dan $P_2'(x_2',y_2')$ dengan kondisi $y_1 = y_1'$ dan $y_2 = y_2'$ (lihat Gambar 1.25). Berdasarkan definisi, kita dapat menyimpulkan bahwa jarak antara titik P_1 dan P_1' sama dengan jarak P_2 dan P_2'.

Jarak P_1 dan $P_1' = d(P_1,P_1') = \sqrt{(x_1'-x_1)^2 + (y_1'-y_1)^2}$ (*)

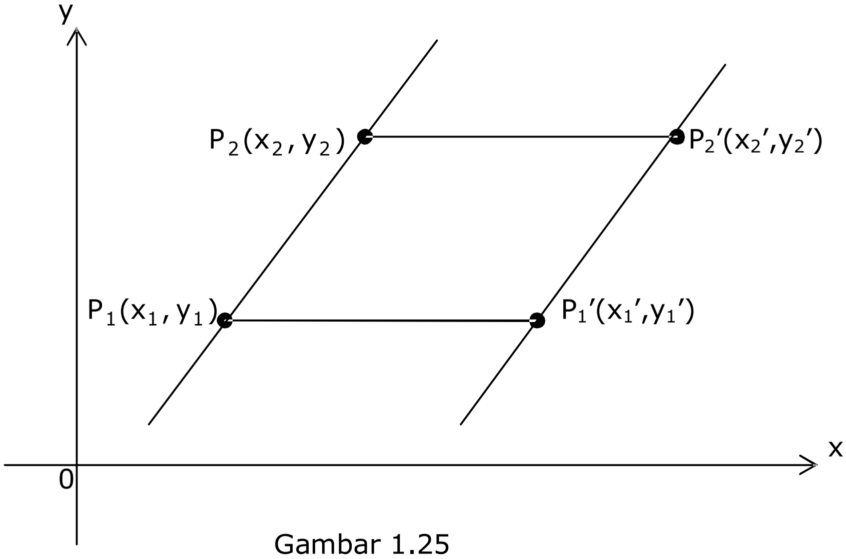
Karena $y_1' = y_1$ maka $d(P_1,P_1') = \sqrt{(x_1'-x_1)^2} = x_1'-x_1$ (**)

Jarak P_2 dan $P_2' = d(P_2,P_2') = \sqrt{(x_2'-x_2)^2 + (y_2'-y_2)^2}$ (#)

Karena $y_2' = y_2$, maka $d(P_2,P_2') = \sqrt{(x_2'-x_2)^2} = x_2'-x_2$ (##)

Karena jarak P_1 dan P_1' sama dengan jarak P_2 dan P_2' maka persamaan (**) sama dengan persamaan (##) atau dapat ditulis sebagai :

$$x_1'-x_1 = x_2'-x_2 \text{ atau } x_2'-x_1' = x_1'-x_1 = x_2'-x_2$$



Gambar 1.25
Dua garis sejajar

Dari Gambar 1.25 diketahui bahwa :

Kemiringan garis l_1 adalah $m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Kemiringan garis l_2 adalah $m_2 = \dfrac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$

Karena : $x_2' - x_1' = x_2 - x_1$; $y_1' = y_1$ dan $y_2' = y_2$,

maka $m_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m_1$

Jadi dapat dibuktikan bahwa dua garis dikatakan sejajar jika mempunyai kemiringan atau koefisien arah yang sama dan ditulis dalam bentuk :

$$m_1 = m_2 \qquad (1.5)$$

Contoh 1.20

Buktikan bahwa garis l_1 yang melalui titik-titik (0,6) dan (4,-2) sejajar dengan garis l_2 yang melalui titik (0,4) dan (1,2).

Penyelesaian :

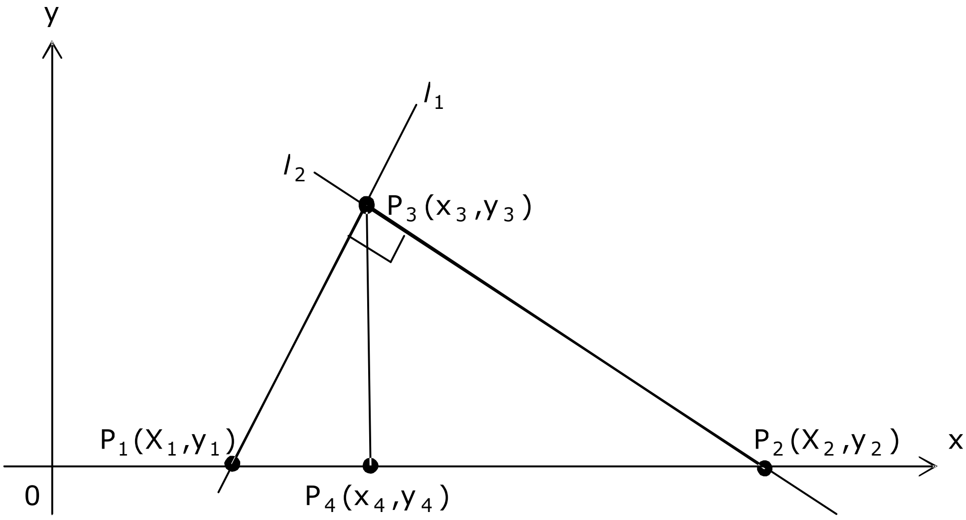
Kemiringan garis l_1 adalah $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-6}{4-0} = -2$

Kemiringan garis l_2 adalah $m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-4}{1-0} = -2$

Karena $m_1 = m_2$, maka garis l_1 sejajar dengan garis l_2.

1.8 Dua garis tegak lurus

Hubungan antara kemiringan dua buah garis yang saling tegak lurus dapat ditentukan dengan bantuan Gambar 1.26 berikut ini.



Gambar 1.26
Dua garis tegak lurus

Kemiringan garis l_1 adalah : $m_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$

Kemiringan garis l_2 adalah : $m_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

$\{d(P_1,P_3)\}^2 = \{d(P_1,P_4)\}^2 + \{d(P_3,P_4)\}^2 = (x_4-x_1)^2 + (y_3-y_4)^2$

$\{d(P_2,P_3)\}^2 = \{d(P_2,P_4)\}^2 + \{d(P_3,P_4)\}^2 = (x_4-x_2)^2 + (y_3-y_4)^2$

$\{d(P_1,P_2)\}^2 = \{d(P_1,P_3)\}^2 + \{d(P_2,P_3)\}^2 = \{d(P_1,P_4)+d(P_2,P_4)\}^2$

Jadi :

$(x_4-x_1)^2 + (y_3-y_4)^2 + (x_4-x_2)^2 + (y_3-y_4)^2 = \{(x_4-x_1) + (x_2-x_4)\}^2$

$x_4^2 - 2x_1x_4 + x_1^2 + y_3^2 - 2y_3y_4 + y_4^2 + x_4^2 - 2x_2x_4 + x_2^2 + y_3^2 - 2y_3y_4 + y_4^2 = x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2$

$2x_4^2 + 2y_4^2 - 4y_3y_4 + 2y_3^2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 = -2x_1x_2$

$$2x_4(x_4-x_2)-2x_1(x_4-x_2)+2(y_4-y_3)^2=0$$
$$2(x_4-x_2)^2+2(y_4-y_3)^2=0$$
$$(x_4-x_2)(x_4-x_2) = -(y_4-y_3)(y_4-y_3)$$
$$\frac{x_4-x_2}{y_3-y_4} = \frac{y_4-y_3}{x_4-x_2} \rightarrow \frac{1}{\frac{y_3-y_4}{x_4-x_2}} = \frac{-(y_3-y_4)}{x_4-x_2}$$

Karena : $y_4 = y_2$

$x_4 = x_3$

Maka : $\frac{1}{\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}} = \frac{-(y_3-y_4)}{x_4-x_2}$

$$\frac{1}{m_1} = -m_2 \quad \text{atau} \quad m_1\, m_2 = -1 \qquad (1.6)$$

Contoh 1.21

Buktikan bahwa garis l_1 yang melalui titik-titik (2,-1) dan (5,0) tegak lurus terhadap garis l_2 yang melalui titik-titik (1,1) dan (2,-2) !

Penyelesaian :

Kemiringan garis l_1 adalah : $m_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-(-1)}{5-2} = \frac{1}{3}$

Kemiringan garis l_2 adalah : $m_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2-1}{2-1} = \frac{-3}{1} = -3$

Karena : $m_1.m_2 = -1$, maka garis l_1 saling tegak lurus dengan garis l_2.

Soal-soal :

1. Tentukan kemiringan garis yang melalui titik-titik :

a) $P_1(2,3)$ dan $P_2(4,5)$

b) $P_1(-2,2)$ dan $P_2(1,4)$

c) $P_1(-3,-1)$ dan $P_2(3,-4)$

d) $P_1(1,2)$ dan $P_2(2,-5)$

2. Tentukan apakah garis-garis l_1 dan l_2 berikut ini sejajar, tegak lurus atau tidak keduanya !
   a) Garis l_1 yang melalui titik-titik (1,1) dan (3,3) dan garis l_2 yang melalui titik-titik (0,0) dan (2,-2).
   b) Garis l_1 yang melalui titik-titik (1,2) dan (0,0) dan garis l_2 yang melalui titik-titik (0,-8) dan (2,-4).
   c) Garis l_1 yang melalui titik-titik (0,0) dan (2,4) dan garis l_2 yang melalui titik-titik (1,-2) dan (-2,4).