

Transformasi Elementer dan Rank



TRANSFORMASI ELEMENTER DAN RANK MATRIKS

Transformasi Elementer dan Rank Matriks adalah dua konsep penting dalam aljabar linear, khususnya dalam analisis sistem persamaan linear dan manipulasi matriks.

1. Transformasi Elementer (Operasi Baris Elementer)

Transformasi elementer adalah operasi-operasi yang dilakukan pada baris (atau kolom) suatu matriks untuk menyederhanakan bentuknya tanpa mengubah solusi sistem persamaan yang diwakilinya. Ada **tiga jenis operasi baris elementer**:

1. Pertukaran Baris (Swap):

Menukar dua baris dari matriks.

Contoh: Tukar baris ke-1 dan ke-3.

2. Perkalian Baris dengan Skalar (Scaling):

Mengalikan semua elemen dalam satu baris dengan suatu bilangan tak nol.

Contoh: Kalikan baris ke-2 dengan 5.

3. Penjumlahan Baris (Replacement):

Menambahkan kelipatan dari satu baris ke baris lain.

Contoh: Baris ke-3 dikurangi $2 \times$ baris ke-1.

Transformasi ini digunakan dalam metode eliminasi Gauss atau Gauss-Jordan.

2. Rank Matriks

Rank (peringkat) matriks adalah banyaknya baris (atau kolom) tak nol yang saling **linier independen** dalam bentuk eselon baris dari suatu matriks. Rank memberi informasi tentang:

- Dimensi ruang baris atau ruang kolom.
- Banyaknya persamaan independen dalam sistem persamaan linear.

Cara Menentukan Rank:

1. Ubah matriks ke bentuk **echelon baris** (row echelon form) dengan transformasi elementer.
2. Hitung jumlah baris tak nol setelah disederhanakan.

Contoh:

Misalnya matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Lakukan eliminasi Gauss:

- Baris 2 \rightarrow Baris 2 $- 2 \times$ Baris 1 $\rightarrow [0, 0, 0]$
- Baris 3 \rightarrow Baris 3 $- 3 \times$ Baris 1 $\rightarrow [0, 0, 0]$

Hasil akhir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank} = 1$$

Jika kamu ingin, saya bisa bantu menyederhanakan matriks atau menentukan rank dari matriks tertentu —boleh kamu berikan contohnya?



contoh notasinya

Tentu! Berikut adalah **contoh notasi transformasi elementer dan cara menuliskannya dalam bentuk operasi** serta **notasi rank matriks**.

♦ Contoh Notasi Transformasi Elementer

Misalkan kita memiliki matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Notasi operasi baris elementer biasa ditulis dengan notasi singkat seperti ini:

1. Pertukaran Baris (Swap):

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

Artinya: tukar baris ke-1 dengan baris ke-3.

2. Perkalian Baris dengan Skalar (Scaling):

$$R_2 \rightarrow 2R_2$$

Artinya: baris ke-2 dikalikan dengan 2.

3. Penjumlahan Baris (Replacement):

$$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1$$

Artinya: baris ke-3 dikurangi 2 kali baris ke-1.

◆ Contoh Notasi Rank Matriks

Misalkan setelah transformasi, kita dapatkan bentuk akhir matriks:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena ada 2 baris tak nol, maka:

$$\text{rank}(B) = 2$$

Atau bisa ditulis dalam notasi umum:

$$\text{rank}(A) = r \quad \text{dengan } r \text{ adalah jumlah baris tak nol pada bentuk eselon baris dari } A.$$

Apakah kamu ingin contoh soal lengkap dengan langkah-langkah dan penyelesaian transformasinya juga?



latex small i on bottom

Jika kamu ingin menuliskan huruf kecil i di bagian bawah suatu ekspresi (biasanya sebagai indeks) di LaTeX, kamu bisa menggunakan tanda underscore (`_`) setelah simbol atau huruf.

Berikut beberapa contoh penulisan "**small i on the bottom**" menggunakan LaTeX:

◆ 1. Sebagai Indeks Biasa

Misal kamu ingin menuliskan a_i ("a sub i"):

```
latex
a_i
```

Hasil: a_i

◆ 2. Dalam Penjumlahan (Sigma Notation)

```
latex
\sum_{i=1}^n a_i
```

Hasil: $\sum_{i=1}^n a_i$

◆ 3. Dalam Lingkungan Matematika Display

```
latex
```

```
\[
x_i = y_i + z_i
\]
```

Hasil:

$$x_i = y_i + z_i$$

◆ 4. Untuk Matriks (Elemen Baris i Kolom j)

```
latex
```

```
a_{ij}
```

Hasil: a_{ij}

Jika kamu ingin menyisipkan ini ke dalam dokumen tertentu atau punya ekspresi spesifik yang ingin dituliskan, bisa kamu beri tahu contohnya?



bagaimana jika saya ingin i diatas?

Jika kamu ingin huruf kecil i **berada di atas** dalam notasi LaTeX (sebagai pangkat atau superskrip), kamu cukup menggunakan simbol caret (`^`), seperti berikut:

◆ 1. Huruf i di atas (Superscript)

Misalnya a^i ("a pangkat i"):

```
latex
```

```
a^i
```

Hasil: a^i

◆ 2. Jika Indeksnya Lebih dari Satu Karakter

Gunakan kurung kurawal `{}` untuk mengelompokkan:

```
latex
```

```
a^{i+1}
```

Hasil: a^{i+1}

◆ 3. Dalam Notasi Sigma dengan Pangkat

Misalnya:

latex

```
\sum_{i=1}^n a^i
```

Hasil:

$$\sum_{i=1}^n a^i$$

Jadi, secara ringkas:

- **Subscript (bawah):** gunakan ``_`` → ``a_i``
- **Superscript (atas):** gunakan ``^`` → ``a^i``

Kamu ingin menuliskan notasi matematika tertentu dengan i di atas? Saya bisa bantu formatnya.



Uploaded image

how make this notation using latex

Great — based on the image you provided, the notation appears to represent a type of **elementary matrix** or transformation matrix, with multiple subscripts and superscripts. Here's how to write it in LaTeX:

✓ LaTeX Code:

latex

```
H_{2 3}^{2\, (-1)}(A)_i
```

📄 Explanation:

- ``H_{2 3}``: Subscripted with both 2 and 3
- ``^{2\, (-1)}``: Superscript with ``^2`` and ``(-1)`` (I added a small space ``\,`` for clarity)
- ``(A)_i``: Function applied to A, followed by subscript ``i``

📄 Rendered Output:

$$H_{23}^{2(-1)}(A)_i$$

Let me know if you want this customized further (e.g., adding matrix brackets, different subscript styles, etc.).



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1^* & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

jelaskan cara mencari rank matrix ini

Untuk mencari **rank** dari matriks A yang ditampilkan dalam gambar, kita perlu menyederhanakannya menjadi **bentuk eselon baris** (row echelon form) menggunakan **operasi baris elementer**. Rank adalah jumlah baris tak nol setelah matriks disederhanakan.

Matriks A adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1^* & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Langkah-langkah Menentukan Rank Matriks

1. Buat elemen utama (pivot) di baris pertama menjadi 1

Misalnya kita tidak ubah dulu baris pertama, tapi gunakan untuk mengeliminasi elemen di bawahnya.

2. Eliminasi elemen kolom pertama di bawah pivot

Gunakan R_1 (baris 1) untuk menghilangkan entri di bawahnya di kolom pertama:

- $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$
- $R_3 \leftarrow R_3 - \frac{3}{2}R_1$
- $R_4 \leftarrow R_4 - \frac{1}{2}R_1$

3. Lanjutkan ke kolom ke-2, cari pivot baru, dan ulangi proses

Setelah tiap pivot, eliminasi entri di bawahnya.

4. Ubah matriks ke bentuk eselon baris

Tujuannya adalah agar matriks tampak seperti ini:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris keempat adalah nol → tidak dihitung sebagai baris linier independen.

5. Hitung baris tak nol → itulah rank

Jika kamu menyelesaikan operasi baris dengan benar dan hasil akhirnya memiliki **3 baris tak nol**, maka:

$$\text{rank}(A) = 3$$

Catatan:

- Tanda bintang (pada entri 1*) tampaknya menunjukkan elemen pivot awal.
- Rank matriks maksimal adalah $\min(\text{jumlah baris}, \text{jumlah kolom})$ → di sini maksimal 4.

Jika kamu ingin, saya bisa lanjutkan semua operasi baris langkah demi langkah untuk mendapatkan hasil akhir. Mau dilanjutkan secara lengkap?



bagaimana caranya eliminasi

Bagus! Mari kita bahas **cara eliminasi baris (eliminasi Gauss)** langkah demi langkah untuk menentukan **rank matriks** A berdasarkan matriks yang kamu berikan.

Matriks Awal:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Tujuan Eliminasi:

Ubah matriks menjadi **bentuk eselon baris** (row echelon), yaitu bentuk segitiga bawah-nol, dengan **pivot** (angka utama) di depan setiap baris tak nol.

Langkah 1: Ubah pivot pertama jadi 1

Pivot pertama ada di $a_{11} = 2$, kita bisa sederhanakan baris pertama:

$$R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0.5 & 1.5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

✓ Langkah 2: Hilangkan elemen di bawah pivot (kolom 1)

Gunakan R_1 untuk menghilangkan elemen di baris 2, 3, dan 4:

- $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$
- $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$
- $R_4 \leftarrow R_4 - 1R_1$

Hasil:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0.5 & -5.5 \\ 0 & 3 & -0.5 & 3.5 \end{bmatrix}$$

✓ Langkah 3: Buat pivot kedua (baris 2, kolom 2) jadi 1

$$R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2$$

$$R_2 = [0, 1, 0, 1]$$

✓ Langkah 4: Hilangkan elemen di kolom 2 bawah dan atas R_2

- $R_3 \leftarrow R_3 + 5R_2$
- $R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2$
- $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$

Hasil:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

✓ Langkah 5: Pivot ketiga di $a_{33} = 0.5$

$$R_3 \leftarrow 2R_3 \Rightarrow R_3 = [0, 0, 1, -1]$$

Hilangkan elemen kolom 3 lainnya:

- $R_4 \leftarrow R_4 + 0.5R_3$

- $R_1 \leftarrow R_1 - 0.5R_3$

Hasil:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

✓ **Langkah 6: Cek jumlah baris tak nol**

Ada **3 baris tak nol** → maka:

$$\boxed{\text{Rank}(A) = 3}$$

Kalau kamu mau, saya bisa bantu tuliskan semua ini dalam bentuk LaTeX juga. Mau?