

PERTEMUAN KE 15

Eigen Value dan Eigen Vektor

DEFINISI

Jika A adalah matrik $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan **vektor eigen** dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu:

$$Ax = \lambda x$$

Skalar λ disebut **eigen value** dari A dan x dikatakan **eigen vector** yang *bersesuaian* dengan λ . Masalah untuk mencari vektor $x \in R^n$, $x \neq 0$ dan λ adalah bilangan real yang memenuhi persamaan : $Ax = \lambda x$, disebut masalah nilai eigen.

MENGHITUNG EIGEN VALUE DAN EIGEN VECTOR

Untuk mencari nilai eigen matrik A yang berukuran $n \times n$ maka kita menuliskannya kembali sebagai

$$\begin{aligned}\underline{Ax} &= \underline{\lambda x} \\ \underline{Ax} - \underline{\lambda x} &= 0 \\ (A - \lambda I) \underline{x} &= 0\end{aligned}$$

Dan persamaan di atas akan mempunyai penyelesaian jika

$$|A - \lambda I| = 0$$

MENGHITUNG EIGEN VALUE DAN EIGEN VECTOR

tentukan nilai eigen dan vektor eigen untuk matrik berikut

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

MENGHITUNG EIGEN VALUE DAN EIGEN VECTOR

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dengan $a \neq 0$,

Menghitung Eigen Value :

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5 - \lambda)(4 - \lambda) - (-1)(-2) = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$$

$$(\lambda - 6)(\lambda - 3) = 0$$

Eigen value :

$$\lambda_1 = 6 \text{ atau } \lambda_2 = 3$$

MENGHITUNG EIGEN VALUE DAN EIGEN VECTOR

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -x_2$, misalkan $x_2 = s$, maka $x_1 = -s$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x di normalisasi :

$$|x| = \sqrt{(-s)^2 + s^2} = s\sqrt{2}$$

$$x_n = \frac{x}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dari sini diperoleh eigen vector:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Menghitung Eigen Vector :

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ -2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Untuk $\lambda = 6$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

MENGHITUNG EIGEN VALUE DAN EIGEN VECTOR

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$x_2 = 2x_1$, misalkan $x_1 = s$, maka $x_2 = 2s$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

x di normalisasi :

$$|x| = \sqrt{s^2 + (2s)^2} = s\sqrt{5}$$

$$x_n = \frac{x}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dari sini diperoleh eigen vector:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Menghitung Eigen Vector :
 $(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda & -1 \\ -2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Untuk $\lambda = 3$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

MENGHITUNG EIGEN VALUE DAN EIGEN VECTOR

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Menghitung Eigen Value :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)^2 + 9 = 0$$

Diperoleh : $\lambda_1 = 1+3i$ atau $\lambda_2 = 1 - 3i$

Karena nilai eigen harus real, maka matrik tersebut tidak punya nilai eigen dan vektor eigen.

TERIMA KASIH
