PERTEMUAN KE 14

TRANSFORMASI LINIER

Definisi :

Jika $F:V \rightarrow W$ adalah sebuah fungsi dari ruang vektor V ke dalam ruang vektor W, maka F disebut transformasi linier (pemetaan linier), jika :

- (i). $F(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{u}) + F(\boldsymbol{v})$, untuk semua vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di V
- (ii). $F(k\boldsymbol{u}) = kF(\boldsymbol{u})$ untuk semua vektor $\boldsymbol{u}$ di dalam V dan semua skalar k

Contoh 1

Misal $F\colon R^2 \rightarrow R^3$ adalah sebuah fungsi yang didefinisikan oleh :

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x, x+y, x-y)$$

Buktikan bahwa F adalah transformasi linier.

Contoh 1: $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x, x+y, x-y)$

Misalkan $u = (x_1, y_1)$ dan $v = (x_2, y_2)$, maka

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$F(\mathbf{u}) = F(x_1, y_1) = (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1)$$

$$F(\mathbf{v}) = F(x_2, y_2) = (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2)$$

$$F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) = (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2)$$

$$= (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$$

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (x_1 + x_2, [x_1 + x_2] + [y_1 + y_2], [x_1 + x_2] - [y_1 + y_2])$$

$$= (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$$

Tampak bahwa :

$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$ Syarat (i) dipenuhi.

Contoh 1: $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x, x+y, x-y)$

Misalkan k adalah sebuah skalar,

$k\mathbf{u} = (kx_1, ky_1)$, maka

$$
\begin{aligned}
F(k\mathbf{u}) &= (kx_1, kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1) \\
&= k(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) \\
&= k\,F(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

Syarat (ii) dipenuhi.

Jadi F adalah sebuah transformasi linier

Contoh 1: $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x, x+y, x-y)$

Pembuktian secara Numerik, misalkan :

k = 2, u = (2,3) dan v = (4,5) maka

ku = 2(2,3) = (4,6), dan u+v = (6,8)

$F(\mathbf{u}) = F(2,3) = (2, 2+3, 2-3) = (2, 5, -1)$

$F(\mathbf{v}) = F(4,5) = (4, 4+5, 4-5) = (4, 9,-1)$

$F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \quad = (2, 5, -1) + (4, 9, -1) = (6, 14, -2)$

$F(u+v) = F(6,8) = (6, 6+8, 6-8) = (6, 14, -2)$

Tampak bahwa $F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) = F(u+v)$….. Syarat (i) terpenuhi

$F(k\mathbf{u}) \quad = F(4,6) = (4, 4+6, 4-6) = (4, 10, -2)$

$kF(u) \quad = 2\ (2, 5, -1) = (4, 10, -2)$

Tampak bahwa F(ku) = k F(u) ……. Syarat (ii) dipenuhi.

Jadi F adalah sebuah transformasi linier

Contoh 2:

Misal $F:R^3 \rightarrow R^2$ adalah sebuah fungsi yang didefinisikan oleh :

$$F(\mathbf{x,y,z}) = (3x + yz, 2x - z)$$

Apakah *F* adalah transformasi linier ?

Misalkan $u = (x_1, y_1, z_1)$ dan $v = (x_2, y_2, z_2)$, maka

$\boldsymbol{u + v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$F(\mathbf{u}) = F(x_1, y_1, z_1) = (3x_1 + y_1 z_1,\ 2x_1 - z_1)$

$F(\mathbf{v}) = F(x_2, y_2, z_2) = (3x_2 + y_2 z_2,\ 2x_2 - z_2)$

$F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) = (3(x_1+x_2) + (y_1 z_1 + y_2 z_2),\ 2(x_1+x_2) - (z_1 + z_2))$

$F(u+v) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$= (3(x_1+x_2) + (y_1+y_2)(z_1+z_2), 2(x_1+x_2) - (z_1 + z_2))$

Tampak bahwa : $F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \neq F(u+v)$

F bukan transformasi Linier.

Contoh 2: Pembuktian secara numerik

Misal $F{:}R^3 \rightarrow R^2$ adalah sebuah fungsi yang didefinisikan oleh :

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (3x + yz, 2x - z)$$

Apakah *F* adalah transformasi linier ?

Misalkan $u = (2, 2, 2)$ dan $v = (3, 3, 3)$, dan k = 2, maka

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (5, 5, 5)$ dan ku = 2(2, 2, 2) = (4, 4, 4)

$F(\mathbf{u}) = F(2, 2, 2) = (3.2 + 2.2,\ 2.2 - 2) = (10, 2)$

$F(\mathbf{v}) = F(3, 3, 3) = (3.3 + 3.3,\ 2.3 - 3) = (18, 3)$

$F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) = (10, 2) + (18, 3) = (28, 5)$

$F(u+v) = F(5, 5, 5) = (3.5 + 5.5,\ 2.5 - 5) = (40, 5)$

Tampak bahwa : $F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \neq F(u+v)$

F bukan transformasi Linier.

Contoh 3

Proyeksi: $L : R^3 \to R^2$ didefinisikan oleh

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

L adalah transformasi linier karena

(a) untuk setiap $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$

$$L(u+v) = L\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = L(u) + L(v).$$

(b) untuk $k \in R$,

$$L(ku) = L\left(\begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = kL\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = kL(u)$$

Contoh 4

Misalkan

$$L : P_2 \to P_1, L\left(a_2x^2 + a_1x + a_0\right) = \left(a_2 + a_1\right)x + a_0,$$

Dimana P_n adalah himpunan semua polinomial berderajat $\leq n$. Apakah L transformasi linier ?

Jawab:

L adalah transformasi linier, karena

(a) untuk setiap $u = a_2x^2 + a_1x + a_0, v = b_2x^2 + b_1x + b_0$ dalam P_2 ,

$$\begin{aligned} L(u+v) &= L\left(\left(a_2+b_2\right)x^2 + \left(a_1+b_1\right)x + \left(a_0+b_0\right)\right) \\ &= \left[\left(a_2+b_2\right) + \left(a_1+b_1\right)\right]x + \left(a_0+b_0\right) \\ &= \left[\left(a_2+a_1\right)x + a_0\right] + \left[\left(b_2+b_1\right)x + b_0\right] \\ &= L\left(a_2x^2 + a_1x + a_0\right) + L\left(b_2x^2 + b_1x + b_0\right) \\ &= L(u) + L(v) \end{aligned}.$$

Contoh 4

(b) untuk $k \in R$,

$$
\begin{aligned}
L(ku) &= L\left(k\left(a_2x^2 + a_1x + a_0\right)\right) = L\left(ka_2x^2 + ka_1x + ka_0\right) \\
&= \left(ka_2 + ka_1\right)x + ka_0 = k\left[\left(a_2 + a_1\right)x + a_0\right] \\
&= kL\left(a_2x^2 + a_1x + a_0\right) \\
&= kL(u)
\end{aligned}
$$

Tampak bahwa:

L(u+v) = L(u) + L(v) syarat (i)

L(ku) = kL(u) syarat (ii)

Jadi, L adalah transformasi linier

MATRIK PENYAJIAN

Misalkan **T: $\mathbf{R^n} \rightarrow \mathbf{R^m}$** adalah transformasi linier dari ruang vektor real **V** ke ruang vektor real **W**, bila V dan W berdimensi berhingga, maka transformasi linier tersebut dapat dinyatakan dengan suatu matrik, yang disebut matriks penyajian (representasi matriks).

MATRIK PENYAJIAN

Misalkan $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ adalah basis baku untuk $\boldsymbol{R^n}$ dan misalkan **A** adalah sebuah matrik *m x n* yang dibentuk oleh $\mathbf{T(e_1)}, \mathbf{T(e_2)}, \ldots, \mathbf{T(e_n)}$ sebagai vektor – vektor kolomnya, maka **A** disebut sebagai matriks penyajian atau matriks baku.

MATRIK PENYAJIAN

Contoh 4

Misalkan T:R² → R² diberikan oleh :

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

a) Tentukan matrik penyajian A
b) Hasil transformasi titik(3, 4)

a) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = T(e_1) + T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ adalah matrik penyajian untuk T

b) $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix}$

MATRIK PENYAJIAN

Contoh 5

Misalkan jika T:$R^2 \rightarrow R^3$ diberikan oleh :

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = T(e_1) + T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$ adalah matrik penyajian untuk T

MATRIK PENYAJIAN

Contoh 6

Misalkan jika T:R^3 → R^2 diberikan oleh :

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_3 \\ x_3 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matrik penyajian untuk T

TERIMAKASIH