SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

PERTEMUAN KE 12 DAN 13

SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)

DEFINISI :

SPL adalah suatu persamaan yang variabel-vaiabelnya berpangkat satu.

Contoh:

$2x + 3y - 4z = 5$ (linier, karena *x, y,* dan *z* berpangkat satu)

$2x + 3y^2 - 4z^{2/3} = 5$ (tidak linier, karena *y* dan *z* tidak berpangkat satu)

$4xz + 3y - 2x = 7$ (tidak linier, karena ada perkalian variabel *x* dan *z*)

BENTUK UMUM SPL

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

:

:

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$

Contoh:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \\ x_1 \qquad - 7x_3 &= 6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad m = 4, n = 3$$

dalam bentuk matriks koefisien:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Bentuk Matriks *Augmented* (Matrik Lengkap)

$$[A \vdots b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Contoh : SPL

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= -11 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= -5 \end{aligned}$$

Bentuk Augmentasi : SPL

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

SPL Non Homogen dan SPL Homogen

matriks koefisien:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk matrik :

$$Ax = b$$

- Bila matrik $\boldsymbol{b} \neq 0$, disebut SPL non homogen
- Bila matrik $\boldsymbol{b} = 0$, disebut SPL homogen

SPL Non Homogen dan SPL Homogen

SPL Non Homogen

$$2x + 8y - 5z = 10$$
$$3x - 7y + 5\mathbf{z} = 12$$
$$4x + 7y + 8z = 15$$

SPL Homogen

$$5x + 4y - 3z = 0$$
$$3x - 2y + 2\mathbf{z} = 0$$
$$8x + 7y + 5z = 0$$

- Bila matrik $\boldsymbol{b} \neq 0$, disebut SPL non homogen
- Bila matrik $\boldsymbol{b} = 0$, disebut SPL homogen

SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER

- Solusi SPL maksudnya adalah mencari nilai variabel-variabelnya. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk mencari solusi SPL antara lain :
  - Cara eleminasi
  - Metode Cramer (bisa digunakan jika $m = n$)
  - Metode Invers Matriks (bisa digunakan jika $m = n$)
  - Eliminasi Gauss
  - Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Setiap SPL mempunyai satu dari kesimpulan eksklusif berikut,

1. SPL mempunyai solusi unik (tunggal, hanya ada satu solusi)
2. SPL tidak mempunyai solusi (inkonsisten)
3. SPL mempunyai banyak solusi

SOLUSI SPL : CARA ELEMINASI

Hitung nilai x, y, dan z dari SPL berikut:

$2x + 8y - 5z = 24 \quad \ldots\ldots \; (1)$

$3x - 2y + 5\mathbf{z} = 5 \quad \ldots.. \; (2)$

$4x + 7y + 8z = 48 \quad \ldots.. \; (3)$

$(1) \times 3 \;\; \text{dan} \; (2) \times 2$

$6x + 24y - 15z = 72$

$6x - 4y + 10\mathbf{z} \quad = 10$

$\text{---------------------------} \; -$

$28y - 25z = 62 \quad \ldots.. \; (4)$

$(1) \times 2 \;\; \text{dan} \; (3) \times 1$

$4x + 16y - 10z = 48$

$4x + 7y \;\; + \;\; 8z = 48$

$\text{---------------------------} \; -$

$9y - 18z = 0 \quad \ldots.. \; (5)$

SOLUSI SPL : CARA ELEMINASI

$(4) \times 9$ dan $(5) \times 28$

$$
\begin{aligned}
252\,y - 225\,z &= 558 \\
252\,y - 504\,\mathbf{z} &= 0 \\
\hline
279\,z &= 558 \quad - \\
z &= 2
\end{aligned}
$$

Pers.(5)

$$
\begin{aligned}
9y - 18z &= 0 \\
9y - 18(2) &= 0 \\
y &= 4
\end{aligned}
$$

Pers.(1)

$$
\begin{aligned}
2x + 8y - 5z &= 24 \\
2x + 8(4) - 5(2) &= 24 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Solusi :

x = 1, y = 4, z = 2

SOLUSI SPL : METODE CRAMER

SPL : **Ax** = **b** nilai *x* dapat dicari dengan

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}$$

Dimana

$|A_k|$ adalah harga determinan unsur-unsur matriks bujursangkar **A** dengan kolom ke *k* diganti unsur-unsurnya oleh unsur-unsur **b**.

$|A|$ adalah harga determinan matriks bujursangkar **A**

SOLUSI SPL : METODE CRAMER

Hitung nilai x, y, dan z dari SPL berikut:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ 3x + 2y - 4z &= 1 \\ x + 4y + z &= 15 \end{aligned}$$

SOLUSI SPL : METODE CRAMER

Matriks : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{A_x} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{\underline{b}} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 15 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \end{array}$ $\quad \mathbf{A_y} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \mathbf{\underline{b}} & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 15 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \end{array}$ $\quad \mathbf{A_z} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \mathbf{\underline{b}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 15 \end{matrix}} \end{bmatrix} \end{array}$

$$det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 19 \qquad det(\mathrm{A_y}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix} = 57$$

$$det(\mathrm{A_x}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 15 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 19 \qquad det(\mathrm{A_z}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 15 \end{vmatrix} = 38$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{19}{19} = 1 \qquad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{57}{19} = 3 \qquad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{38}{19} = 2$$

SOLUSI SPL : METODE INVERS MATRIK

Solusi : $x = A^{-1} b$

Hitung nilai x, y, dan z dari SPL berikut:

$$2x + y - z = 3$$
$$3x + 2y - 4z = 1$$
$$x + 4y + z = 15$$

SOLUSI SPL : METODE INVERS MATRIK

Matriks : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 18/19 & -5/19 & -2/19 \\ -7/19 & 3/19 & 5/19 \\ 10/19 & -7/19 & 1/19 \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 15 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 18/19 & -5/19 & -2/19 \\ -7/19 & 3/19 & 5/19 \\ 10/19 & -7/19 & 1/19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

jadi $x = 1$, $y = 3$, dan $z = 2$

SOLUSI SPL : METODE ELEMINASI GAUSS

Terlebih dahulu kita harus paham aturan Operasi Baris Elementer (OBE)

Contoh:
Baris ke-1 di tukar dengan baris ke-3, ditulis $B_{1,3}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_{1,3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Contoh:
Baris ke-2 di kali 5, ditulis $5B_2(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5B_{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 10 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUSI SPL : METODE ELEMINASI GAUSS

Contoh:
Baris ke-3 di tambah dengan 5 kali baris ke-2, ditulis $(B_3 + 5B_2)$ (A).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 + 5B_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Contoh:
Baris ke-2 di kurangi dengan 3 kali baris ke-1, ditulis $(B_2 - 3B_1)$(A).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 - 3B_1 (A).} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUSI SPL : METODE ELEMINASI GAUSS

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di bawah diagonal utamanya adalah 0

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Prinsip metode eleminasi Gauss :

Ubahlah matrik augmentasi A menjadi matrik segitiga atas menggunakan OBE

SOLUSI SPL : METODE ELEMINASI GAUSS

Hitung nilai x, y, dan z dari SPL berikut:

$$2x + y - z = 3$$
$$3x + 2y - 4z = 1$$
$$x + 4y + z = 15$$

SOLUSI SPL : METODE ELEMINASI GAUSS

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 - ½ B_1]{B_2 - 3/2\, B_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & -7/2 \\ 0 & 7/2 & 3/2 & 27/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2B_3]{2B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 7 & 3 & 27 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 - 7\, B_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 38 & 76 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 \times 1/38]{}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Baris ke-3:
Z = 2

Baris ke-2:
y − 5z = − 7
y − 5(2) = − 7
y = 3

Baris ke-1:
2x + y − z = 3
2x + (3) − (2) = 3
x = 1

SOLUSI SPL : METODE GAUSS-JORDAN

Sama seperti metode Gaus, hanya saja matrik OBE harus dijadikan matrik Identitas I

Hitung nilai x, y, dan z dari SPL berikut:

$$2x + y - z = 3$$
$$3x + 2y - 4z = 1$$
$$x + 4y + z = 15$$

SOLUSI SPL : METODE GAUSS-JORDAN

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 - 1/2\, B_1]{B_2 - 3/2\, B_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & -7/2 \\ 0 & 7/2 & 3/2 & 27/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2B_3]{2B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 7 & 3 & 27 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 - 7\, B_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 38 & 76 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 \times 1/38]{B_1 \times ½}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{B_1 + ½\, B_3 \\ B_2 + 5\, B_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - ½\, B_2}$$

SOLUSI SPL : METODE GAUSS-JORDAN

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - \frac{1}{2} B_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Baris ke-1: $x = 1$

Baris ke-2: $y = 3$

Baris ke-3: $z = 2$

SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER

- Solusi SPL maksudnya adalah mencari nilai variabel-variabelnya. Bila $m \neq n$, jumlah variabel tidak sama dengan jumlah persamaan, untuk mencari solusi SPL gunakan:
  - Eliminasi Gauss

  atau
  - Metode Eliminasi Gauss-Jordan

SPL Non Homogen : Kasus m > n

Contoh 1

$x + y = 6$

$2x - y = 3$

$7x - 2y = 15$

Jelaskan apakah sistem ini punya solusi atau tidak !

Matriks *Augmented* dari sistem tersebut adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & 15 \end{bmatrix}$$

SPL Non Homogen : Kasus m > n

Operasi Baris Elementer (OBE) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & 15 \end{bmatrix} H_{21}^{-2},\ H_{31}^{-7} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & -9 & -27 \end{bmatrix} H_{32}^{-3} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} H_{2}^{-1/3} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} H_{12}^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hasil matriks *Augmented* : $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

SPL ini punya solusi unik, yaitu $x = 3$ dan $y = 3$.

SPL Non Homogen : Kasus m > n

Contoh 2

$2x + 4y = 8$

$x + 2y = 4$

$7x + 14y = 28$

Jelaskan apakah sistem ini punya solusi atau tidak.

Matriks *Augmented* dari sistem tersebut adalah :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 14 & 28 \end{bmatrix}$$

SPL Non Homogen : Kasus m > n

Operasi Baris Elementer (OBE) :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 14 & 28 \end{bmatrix} H_{21}^{-1/2},\ H_{31}^{-7/2} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} H_1^{1/2} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hasil matriks *Augmented* : $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Pada contoh ini diperoleh persamaan berikut : $x + 2y = 4$ atau $x = 4 - 2y$.

Bila diambil nilai $y = \lambda$, (λ bilangan riil) maka diperoleh persamaan berikut :

$$x = 4 - 2\lambda$$

$$y = \lambda$$

artinya, sistem mempunyai banyak solusi.

SPL Non Homogen : Kasus m > n

Solusi :

$X = 4 - 2\lambda$ dan $y = \lambda$

Untuk variasi Nilai $\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Nilai $x = 4, 2, 0, -2, \ldots\ldots$

Nilai $y = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

SPL Non Homogen : Kasus m > n

Contoh 3

$2x + y = 4$

$x - 3y = 3$

$3x + 2y = 12$

Jelaskan apakah sistem ini punya solusi atau tidak.

Matriks *Augmented* dari sistem tersebut adalah :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

SPL Non Homogen : Kasus m > n

Operasi Baris Elementer (OBE) :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 12 \end{bmatrix} H_{21}^{-1/2}, H_{31}^{-3/2} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -7/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 6 \end{bmatrix} H_{32}^{1/7} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -7/2 & 1 \\ 0 & 0 & 43/7 \end{bmatrix}$$

Hasil matriks *Augmented* : $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -7/2 & 1 \\ 0 & 0 & 43/7 \end{array}\right]$

Pada contoh ini, baris ketiga menunjukkan suatu hasil yang tidak mungkin, artinya sistem ini tidak mempunyai solusi, atau bisa dikatakan bahwa sistem tersebut adalah inkonsisten.

SPL Non Homogen : Kasus m < n

Contoh 4

$x + 2y + z = 2$

$4x + 9y + 6z = 9$

Jelaskan apakah sistem ini punya solusi atau tidak.

Matriks *Augmented* dari sistem tersebut adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

SPL Non Homogen : Kasus m < n

Operasi Baris Elementer (OBE) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 6 & 9 \end{bmatrix} H_{21}^{-4}, \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Pada contoh ini diperoleh persamaan berikut :

$$y + 2z = 1 \qquad \text{atau} \qquad y = 1 - 2z$$

$$x + 2y + z = 2 \qquad \text{atau} \qquad x = 2 - 2y - z = 3z$$

Bila diambil nilai $z = \lambda$, (λ bilangan riil) maka diperoleh persamaan berikut :

$$y = 1 - 2\lambda$$

$$x = 3\lambda$$

artinya, disini didapat banyak solusi untuk sistem persamaan tersebut.

SPL Non Homogen : Kasus $m < n$

Solusi:

$y = 1 - 2\lambda$ dan $x = 3\lambda$

Untuk variasi Nilai $\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Nilai $x = 0, 3, 6, 9, \ldots\ldots$

Nilai $y = 1, -1, -3, -5, \ldots\ldots$

SPL Non Homogen : Kasus m = n

Pada kasus ini digunakan konsep determinan dan invers untuk melihat ada tidaknya solusi. Jika besar $m = n$, berarti matrik ini adalah matrik bujur sangkar yang bisa dihitung nilai determinannya.

- Jika det(**A**) $\neq$ 0, maka **A**x = **b** punya solusi unik (solusi tunggal).
- Jika det(**A**) = 0,
  - kemungkinan pertama **A**x = **b** tidak punya solusi.
  - Kemungkinan kedua **A**x = **b** mempunyai solusi banyak

SPL Non Homogen : Kasus m = n

Contoh 5

$x + y + 6z = 17$

$4x - 3y - 2z = 4$

$2x + 3y + z = -1$

Jelaskan apakah sistem ini punya solusi atau tidak.

Matriks A dari sistem tersebut adalah : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 103$$

karena $det(\mathrm{A}) \neq 0$, berarti invers matrik A ada, sehingga persamaan tersebut punya solusi unik.

Bila diselesaikan meggunakan cara eleminasi, diperoleh solusi berikut: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$

SPL Non Homogen : Kasus m = n

Contoh 6

$2x + y - z = 5$

$x \ + 4z = -3$

$3x + y + 3z = \ 6$

Jelaskan apakah sistem ini punya solusi atau tidak.

Matriks A dari sistem tersebut adalah : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

SPL Non Homogen : Kasus m = n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 - 3B_1]{B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & 11 \\ 0 & 1 & -9 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 - B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Pada Baris ke-3 :

$0 = 4 \longrightarrow$ tidak konsisten

SPL tersebut tidak punya solusi

SPL Non Homogen : Kasus m = n

Contoh 7

$x + y + z = 6$

$2x + 3y + 3z = 18$

$2x + 2y + 2z = 12$

Jelaskan apakah sistem ini punya solusi atau tidak.

Matrik A dari SPL tersebut adalah :

$$A = = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

SPL Non Homogen : Kasus m = n

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 18 \\ 2 & 2 & 2 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 - 2B_1]{B_2 - 2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - B_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada Baris ke-1 : $x = 0$

Pada Baris ke-2 :

$y + z = 6$ Atau $y = 6 - z$

Misalkan $z = \lambda$, maka $y = 6 - \lambda$

Untuk variasi Nilai λ = 0, 1, 2, 3, ...

Nilai x = 0, 0, 0, 0,.......

Nilai z = 0, 1, 2, 3, ...

Nilai y = 6, 5, 4, 3, ...

SPL tersebut punya solusi banyak.

SPL Homogen

Contoh 8

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0$$
$$3x_1 - 8x_2 + 8x_3 - 16x_4 = 0$$
$$3x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 24x_4 = 0$$

Jelaskan apakah sistem ini punya solusi atau tidak.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & -8 & 8 & -16 & 0 \\ 3 & -5 & -6 & -24 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 - 3B_1]{B_2 - 3B_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -18 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -18 & -12 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 - 4B_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

SPL Homogen

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_3 \times \ -½]{} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada Baris ke-3 :

$x_3 - 2x_4 = 0$

Atau $x_3 = 2x_4$

Misalkan x_4 = t , maka

$x_3 = 2t$

Pada Baris ke-2 :

$x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0$

Atau

$x_2 = 4x_3 + 4x_4$

x_2 = 12t

Pada Baris ke-1 :

$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0$

Atau

$x_1 = 32t$

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (32t,\ 12t,\ 2t,\ t) \\ &= t\,(32,\ 12,\ 2, 1)\end{aligned}$$

Untuk nilai t yang bervariasi, SPL ini punya banyak solusi

TERIMAKASIH