9-10

MATRIKS INVERS

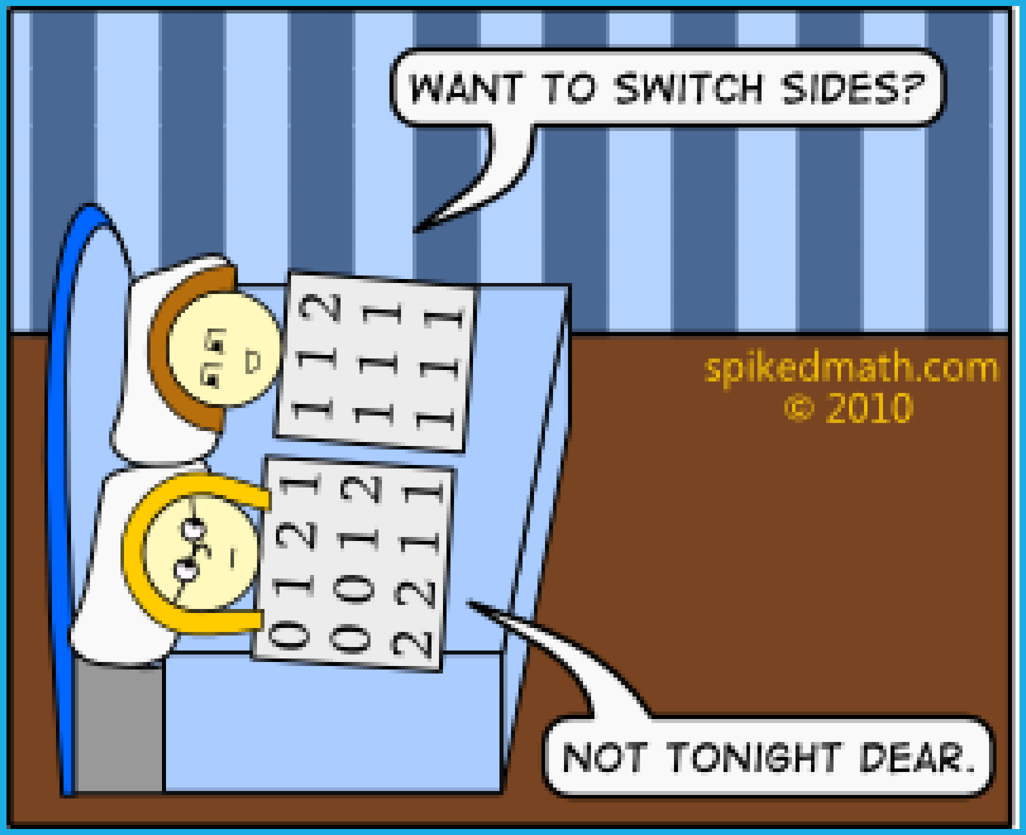
Definisi Invers ● Invers dengan Matriks Adjoin
● Invers dengan Transformasi Baris Elementer

MATERI

- Definisi invers
- Menghitung invers dengan adjoin
- Menghitung invers dengan transformasi baris elementer

TUJUAN

Agar mahasiswa mempunyai pengetahuan dasar dan memahami konsep-konsep tentang matriks invers dan cara menghitung matriksnya.



Sumber: shorturl.at/amtIY

PENGERTIAN MATRIX INVERS

Apakah A dan B saling invers:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Karena $A \times B = B \times A = I$ maka A dan B saling invers, dengan A^{-1} = B dan B^{-1} = A

- Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B sehingga $AB = BA =$I.
- Matriks B disebut matriks invers A ditulis A^{-1}, merupakan matriks bujur sangkar berordo $n \times n$. Invers sebuah matriks bersifat unik dan berlaku sifat $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Matriks yang memiliki invers adalah matriks yang nonsingular.
- Matriks yang tak singular mempunyai invers ($\det(A) \neq 0$), sedangkan matriks singular tidak mempunyai invers ($\det(A) = 0$).

INVERS MATRIKS ORDO 2X2

Contoh:
Tentukanlah invers dari matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(4.2) - (1.7)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

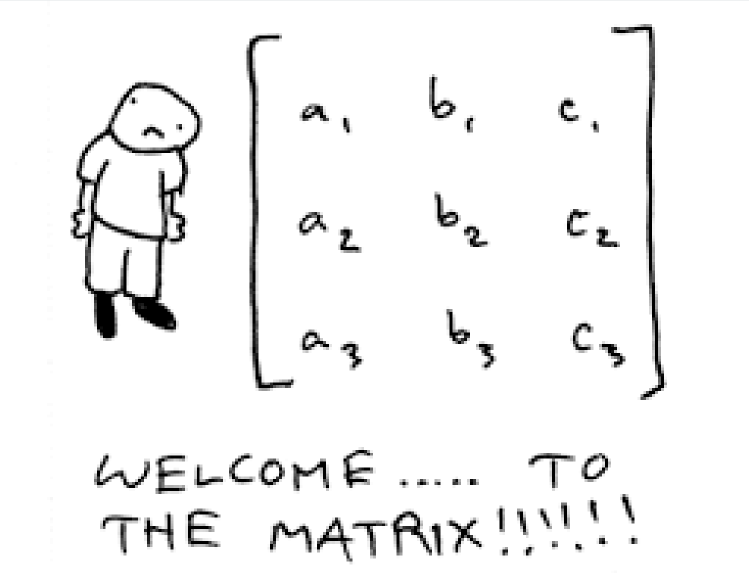
- Menentukan nilai invers matriks ordo 2×2 cukup mudah dilakukan.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(a.d) - (b.c)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

INVERS MATRIKS ORDO 3X3

- Cara untuk menentukan nilai invers matriks A dengan ordo 3 x 3 tidak sama dengan cara menentukan invers matriks dengan ordo 2 x 2.
- Cara menentukan invers matriks ordo 3 x 3 lebih rumit dari cara menentukan invers matriks 2 x 2.
- Mencari invers matriks berordo 3x3 dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan **adjoin** dan **transformasi baris elementer**.



Sumber: shorturl.at/gnELN

INVERS MATRIKS
ORDO 3X3 DENGAN CARA ADJOIN

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{matrix} \Bigg| = (0-2+0)-(-3+2+0) = -1$$

Karena $\det(A) \neq 0$ maka matriks tersebut memiliki invers.

Setelah menentukan determinan, selanjutnya mencari matriks adjoin pada slide berikutnya.

- Matriks minor, kofaktor, dan adjoin berguna untuk menentukan nilai invers dari suatu matriks dengan ordo matriks di atas 3 atau lebih.

- Secara umum, cara menentukan invers matriks dengan cara adjoin dapat diperoleh melalui persamaan dibawah ini.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \; adj \; A \quad untuk \; \det \; A \neq 0$$

- Langkah-langkah:
  - Mencari determinan $\det A$

    Jika $\det(A) \neq 0$ maka matriks tersebut memiliki invers dan sebaliknya
  - Mencari adjoin $adj\ A$
  - Menghitung invers matrik A^{-1}

MATRIKS MINOR

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

- Kita gunakan contoh yang sama pada penentuan matriks minor di slide sebelumnya.
- Untuk mencari matriks adjoin, terlebih dahulu kita cari matriks minor dan kofaktor.
- Berikut adalah hasil dari matriks minor A
- Dari minor matriks ini akan digunakan untuk menentukan matrik kofaktor.

KOFAKTOR

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

Sesuaikan tandanya +/- nya pada setiap elemen

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Kofaktor baris ke-i dan kolom ke-j disimbolkan dengan C_{ij} dapat ditentukan dengan rumus seperti terlihat di samping.
- Kofaktor di samping akan digunakan untuk menentukan adjoin matriks yang akan dicari nilai inversnya.

MATRIKS ADJOIN

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kita lakukan transpose,

$$Adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks invers yang dihasilkan,

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

- Setelah menenentukan kofaktor, langkah selanjutnya adalah mencari matriks adjoin.
- Setelah **matrik adjoin** dan **determinan** diketahui, maka selanjutnya dapat digunakan untuk mencari matrik invers.

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ adj\ \ A \quad untuk\ \ \det\ \ A \neq 0$$

INVERS MATRIKS
DENGAN TRANSFORMASI BARIS ELEMENTER

- Pada kali ini kita menentukan matriks invers dengan menggunakan transformasi baris elementer.
- Memindahkan matriks identitas sebelah kanan ke sebelah kiri menggunakan operasi baris elementer.

Contoh matriks 2×2: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}H_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{H_2 - 5H_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{H_1 - H_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2H_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) = (I|A)$$

Baris pertama kalikan $\frac{1}{2}$

Baris kedua dikurangi 5 kali baris pertama

Baris satu dikurangi baris kedua

Baris kedua dikali 2

Proses berhenti setelah matriks sebelah kiri menjadi matriks identitas

Jadi matriks inversnya adalah: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

INVERS MATRIKS
DENGAN TRANSFORMASI BARIS ELEMENTER (lanjutan)

Contoh matriks 3×3: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{H}_{21}^{-2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{H_{31}^{-1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xleftarrow{\mathrm{H}_{12}^{-2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xleftarrow{\mathrm{H}_{32}^{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \mathrm{H}_{23}^{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{H}_{13}^{-9}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) = (I|A)$$

Jadi matriks inversnya adalah:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

SOAL LATIHAN

1. Apakah matriks berikut memiliki invers? Jika ya tentukan matriks inversnya menggunakan matriks adjoin.

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Apakah kedua matriks berikut saling invers? Buktikan.

$$a)\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b)\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Tentukan invers dari matriks berikut dengan operasi baris elementer.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

TUGAS MATRIKS & RUANG VEKTOR

1. Apakah matriks berikut memiliki invers? Jika ya tentukan matriks inversnya menggunakan matriks adjoin.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Apakah kedua matriks berikut saling invers? Buktikan.

$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

3. Tentukan invers dari matriks berikut dengan operasi baris elementer.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Dikumpulkan paling lambat tanggal 26 Mei 2025, jam 23.59 WIB via email *purwanto.matriks@gmail.com*. Nama file: **Nama_NIM_Matriks.pdf**. Judul ***Subject*** email disamakan dengan nama file.

TERIMA KASIH