

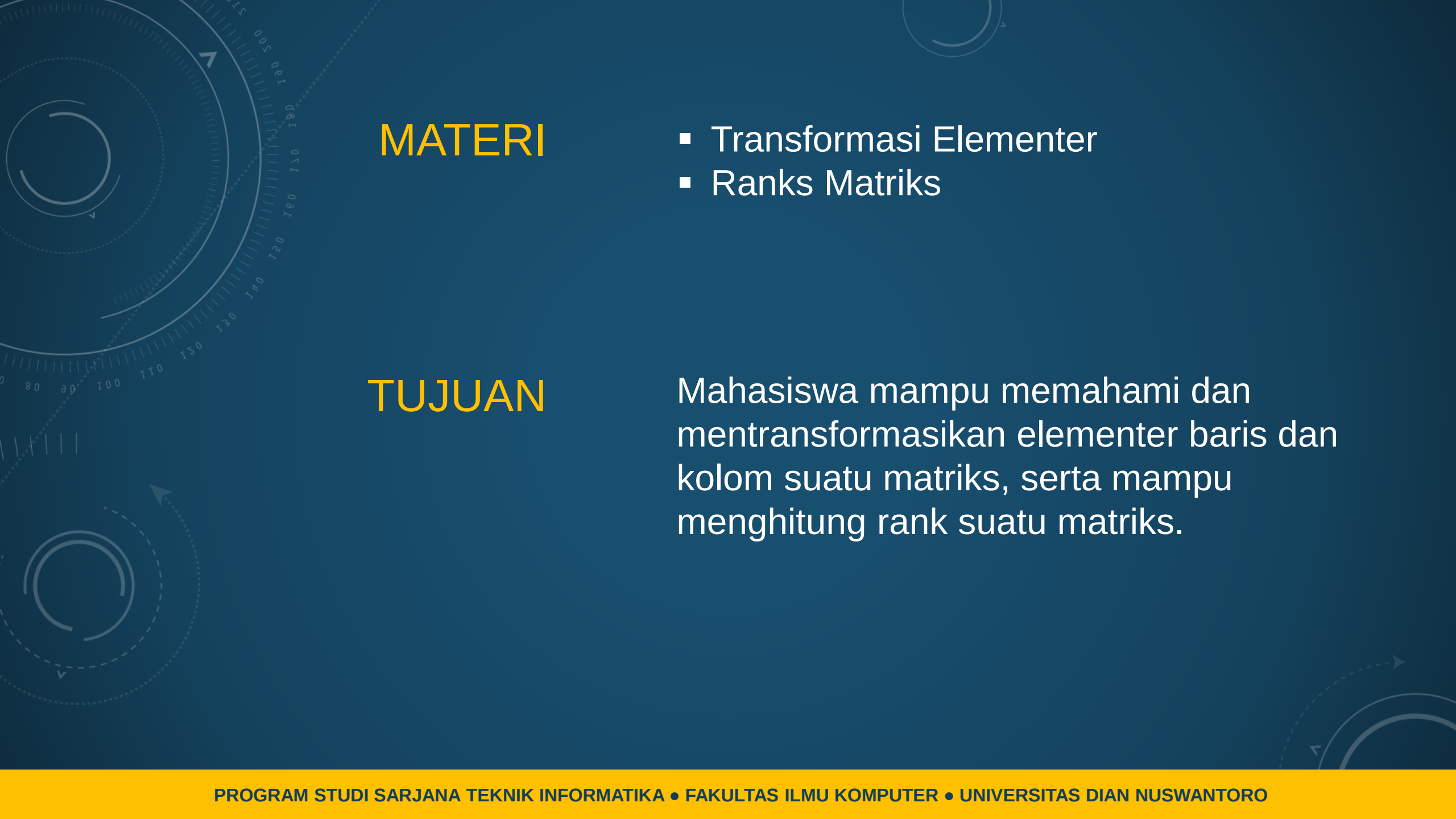


MATRIKS

TRANSFORMASI ELEMENTER DAN RANK MATRIKS

MATA KULIAH: MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

PERTEMUAN: 5



MATERI

- Transformasi Elementer
- Ranks Matriks

TUJUAN

Mahasiswa mampu memahami dan mentransformasikan elementer baris dan kolom suatu matriks, serta mampu menghitung rank suatu matriks.

TRANSFORMASI ELEMENTER

Sebuah matriks $n \times n$ disebut matriks elementer jika matriks tersebut dapat ditemukan dari matriks identitas I_n melalui operasi baris tunggal (**operasi elementer baris**).

Misal E adalah matriks elementer yang diperoleh dari operasi elementer pada I_n . Jika operasi yang sama juga dilakukan pada matriks A maka akan menghasilkan matriks EA , yaitu hasil perkalian matriks E dengan A .

$$\begin{aligned} h(I) &= E \\ h(A) &= EA \end{aligned}$$

Transformasi Elementer. Terdapat 3 transformasi elementer dasar pada matriks A , yaitu:

- Menukar 2 baris

$$h_{ij}(A) = H_{ij} A$$

- Mengalikan baris dengan konstanta $k \neq 0$.

$$h_i^{(k)}(A) = H_i^{(k)} A$$

- Menambahkan perkalian baris ke baris lain.

$$h_{ij}^{(k)}(A) = H_{ij}^{(k)} A$$

TRANSFORMASI ELEMENTER

Contoh.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{13}A} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Menukar baris ke-1 dengan baris ke-3 pada matriks A}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_{13}(I)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Menukar baris ke-1 dengan baris ke-3 pada matriks I}$$

$$h_{13}I(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = H_{13}A$$

Tampak bahwa operasi atau transformasi elementer pada matriks A memberikan hasil yang sama dengan operasi elementer pada matriks I yang dikalikan dengan matriks A.

$$h_{13}(I)(A) = H_{13}(A) \text{ atau } h_{13}I(A) = H_{13}(A)$$

TRANSFORMASI ELEMENTER

1. Penukaran baris ke-i dengan baris ke-j (baris ke-i dijadikan baris ke-j dan baris ke-j dijadikan baris ke-i), ditulis $H_{ij}(A)$.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{13}(A)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Menukar baris ke-1 dengan baris ke-3 pada matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{23}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Menukar baris ke-2 dengan baris ke-3 pada matriks A

2. Penukaran kolom ke-i dengan kolom ke-j (kolom ke-i dijadikan kolom ke-j dan kolom ke-j dijadikan kolom ke-i), ditulis $K_{ij}(A)$.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{13}(A)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Menukar kolom ke-1 dengan kolom ke-3 pada matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{23}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Menukar kolom ke-2 dengan kolom ke-3 pada matriks A

TRANSFORMASI ELEMENTER

3. Mengalikan baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $H_i^\lambda(A)$.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2^3(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -9 & 18 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Mengalikan baris ke-2 dengan skalar 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3^{(-2)}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Mengalikan baris ke-3 dengan skalar -2

4. Mengalikan kolom ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $K_i^\lambda(A)$.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_2^3(A)} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -18 & 6 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Mengalikan kolom ke-2 dengan skalar 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_1^{(-3)}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 6 \\ -9 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Mengalikan kolom ke-1 dengan skalar -3

TRANSFORMASI ELEMENTER

5. Menambah baris ke-i dengan λ kali baris ke-j ditulis $H_{ij}^{\lambda}(A)$.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 13 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}^{(-2)}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Menambah baris ke-1 dengan 2 kali baris ke-2 pada matriks A atau $b_1 + 2(b_2)$

Menambah baris ke-2 dengan -2 kali baris ke-1 pada matriks A atau $b_2 + (-2)(b_1)$

6. Menambah kolom ke-i dengan λ kali kolom ke-j ditulis $K_{ij}^{\lambda}(A)$.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{13}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 13 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{23}^{(0.5)}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2.5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 1.5 & -1 \end{bmatrix}$$

Menambah kolom ke-1 dengan 2 kali kolom ke-3 pada matriks A atau $k_1 + 2(k_3)$

Menambah kolom ke-2 dengan 0.5 kali kolom ke-3 pada matriks A atau $k_2 + (0.5)(k_3)$

TRANSFORMASI ELEMENTER

7. Menambah μ kali baris ke-i dengan λ kali baris ke-j ditulis $H_i^{\mu\lambda}(A)$.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1^{3(2)}(A)} \begin{bmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Menambah 3 kali baris ke-1 dengan 2 kali baris ke-3 pada matriks A atau } 3b_1 + 2(b_3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2^{2(-1)}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 13 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Menambah 2 kali baris ke-2 dengan -1 kali baris ke-3 pada matriks A atau } 2b_2 + (-1)(b_3)$$

8. Menambah μ kali kolom ke-i dengan λ kali kolom ke-j ditulis $K_i^{\mu\lambda}(A)$.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_1^{3(2)}(A)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 15 & -3 & 6 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Menambah 3 kali kolom ke-1 dengan 2 kali kolom ke-3 pada matriks A atau } 3k_1 + 2(k_3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_2^{2(-1)}(A)} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -12 & 6 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Menambah 2 kali kolom ke-2 dengan -1 kali kolom ke-3 pada matriks A atau } 2k_2 + (-1)(k_3)$$

MATRIKS EKUIVALEN

- Matriks A disebut ekuivalen dengan B ditulis $A \sim B$, bila matriks A dapat diperoleh dari B atau matriks B dapat diperoleh dari matriks A dengan transformasi elementer.
- Bila transformasi elementer hanya dilakukan pada baris saja, dikatakan ekuivalen baris. Sedangkan bila transformasi elementer pada kolom saja disebut ekuivalen kolom.

Contoh. Perhatikan contoh transformasi elementer berikut

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{H_{12}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 13 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = B. \text{ Maka } A \sim B. \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{K_{13}^{(2)}(A)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 13 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = B. \text{ Maka } A \sim B. \\ A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{H_1^{3,3}(2)(A)} \begin{bmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = B. \text{ Maka } A \sim B. \end{aligned}$$

MATRIKS EKUIVALEN

- Matriks A disebut ekuivalen dengan B ditulis $A \sim B$, bila matriks A dapat diperoleh dari B atau matriks B dapat diperoleh dari matriks A dengan transformasi elementer.
- Bila transformasi elementer hanya dilakukan pada baris saja, dikatakan ekuivalen baris. Sedangkan bila transformasi elementer pada kolom saja disebut ekuivalen kolom.

Contoh. Matriks A dan B berikut adalah ekuivalen karena matriks B dapat diturunkan dari matriks A melalui transformasi elementer.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{K_{12}^{(1)}} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{K_{42}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = B$$

RANK MATRIKS

Rank matriks A, ditulis $r(A)$ adalah dimensi suatu matriks yang menyatakan banyak maksimum vektor-vektor baris/kolom yang bebas linier (saling berkelipatan).

- Jika matriks A hanya terdiri dari dua baris, cukup diperiksa apakah kedua baris tersebut berkelipatan. Jika tidak berkelipatan maka $r(A)=2$, sedangkan bila berkelipatan maka $r(A) = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris-baris pada A tidak saling berkelipatan.
Maka $r(A)=2$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 3 & -2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Baris-baris pada B saling berkelipatan.
Maka $r(B)=1$

RANK MATRIKS

Prosedur mencari Rank:

1. Tentukan elemen Pivot (pada baris/kolom), untuk mempermudah pilih elemen 1 atau -1.
2. Jadikan nol semua elemen yang sekolom/sebaris dengan pivot tersebut.
3. Sekarang kita perlu perhatikan lagi baris /kolom yang tertinggal (tanpa baris atau kolom yang terdapat pivot):
 - a. apabila tinggal dua baris/kolom yang tersisa maka tinggal diperiksa apakah baris/kolom tersebut kelipatan. Jika ya maka salah satu baris/kolom tersebut dapat dijadikan nol (rank=1), jika tidak langkah selesai (rank=2).
 - b. apabila masih lebih dari dua baris/kolom lakukan lagi langkah 1 di atas sampai langkah 3.a.

Contoh. Tentukan rank dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1^* & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{31}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -7 & 0 & -7 \\ 1^* & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{34}^{(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{23}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Sehingga $R(A)=3$

SOAL LATIHAN

1. Tentukan : H_{12} , K_{13} , $H_2^{(-2)}$, $K_3^{(2)}$, $H_{31}^{(1)}$, $K_{21}^{(2)}$, $H_2^{(1)}_3^{(2)}$ dari matriks-matriks berikut.

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}; \text{b. } A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Matriks B berikut diperoleh dari hasil transformasi elementer $H_{31}^{(1)}(A)$. Tentukan matriks A.

$$\text{a. } B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}; \text{b. } B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOAL LATIHAN

3. Selidikilah, apakah matriks A dan B berikut ekuivalen?

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Tentukan rank dari matriks-matriks berikut:

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$