



MATRIKS

MATA KULIAH: MATRIKS DAN RUANG VEKTOR

PERTEMUAN: 4



MATERI

- Pengertian Matriks
- Jenis-jenis Matriks khusus
- Operasi-operasi pada Matriks

TUJUAN

Mahasiswa mampu memahami pengertian matriks, jenis-jenis matriks khusus, dan operasi-operasi dasar pada matriks.

PENDAHULUAN

- Matriks adalah : kumpulan bilangan yang disusun menurut baris dan kolom.
- Bilangan-bilangan yang tersusun tersebut disebut **elemen – elemen** atau **komponen – komponen** matriks.
- Nama sebuah matriks pada umumnya dinyatakan dengan huruf besar, misal A, B, X, dsb.
- Ukuran atau ordo matriks dituliskan dengan menyebutkan jumlah baris dan jumlah kolom.
- Jika matriks A memiliki m baris dan n kolom, maka ukuran atau ordo matriks A ditulis sebagai $A_{m \times n}$.
- Elemen matriks pada umumnya dinyatakan dengan huruf kecil dengan menyertakan posisinya, misal a_{12} adalah elemen matriks A pada baris 1 kolom 2.

Penulisan Matriks

Secara umum matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini a_{ij} disebut elemen matriks pada baris ke i dan kolom ke j, dimana:
 $i=1,2,\dots,m$ (baris)
 $j=1,2,\dots,n$ (kolom)

PENDAHULUAN

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

kolom 1 kolom 2 kolom 3 kolom 4

— baris 1
— baris 2
— baris 3

Matriks A tersebut terdiri dari 3 baris dan 4 kolom.
Matriks A tersebut disebut berordo 3 x 4, atau dapat ditulis dengan $A_{3 \times 4}$. Matriks A memiliki 12 elemen, yaitu:

$$\begin{aligned} a_{11}=1; a_{12}=2; a_{13}=5; a_{14}=4; \\ a_{21}=2; a_{22}=0; a_{23}=5; a_{24}=6; \\ a_{31}=3; a_{32}=6; a_{33}=4; a_{34}=7; \end{aligned}$$

JENIS-JENIS MATRIKS

Matriks Nol (Zeros). Matriks dengan semua elemennya bernilai nol (0).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Diagonal. Matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar elemen utamanya bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks Satu (Ones). Matriks dengan semua elemennya bernilai satu (1).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Bujur Sangkar. Matriks dengan jumlah baris sama dengan jumlah kolom.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

JENIS-JENIS MATRIKS

Matriks Identitas. Matriks skalar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai satu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Bawah. Matriks bujur sangkar yang elemen-elemen diatas diagonal utamanya nol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks Skalar. Matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai sama.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks Segitiga Atas. Matriks bujur sangkar yang elemen-elemen dibawah diagonal utamanya nol.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Syarat Operasi

- Ukuran matriks harus sama

Sifat Operasi

- $A+B=B+A$ (Komutatif)
- $A-B \neq B-A$ (Tidak Komutatif)

Penjumlahan dan Pengurangan. Dua buah matriks (A dan B) dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila kedua matriks ber-ordo atau berukuran sama. Jika ukuran kedua matriks tidak sama, maka operasi penjumlahan dan pengurangan tidak dapat dilakukan atau tidak berlaku.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Penjumlahan atau pengurangan matriks dilakukan secara langsung pada elemen-elemen matriks pada posisi yang sama.

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Syarat Operasi

- Ukuran matriks harus sama

Sifat Operasi

- $A+B=B+A$ (Komutatif)
- $A-B \neq B-A$ (Tidak Komutatif)

Penjumlahan dan Pengurangan. Dua buah matriks (A dan B) dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila kedua matriks ber-ordo atau berukuran sama. Jika ukuran kedua matriks tidak sama, maka operasi penjumlahan dan pengurangan tidak dapat dilakukan atau tidak berlaku.

Contoh. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan: a. $A+B$; b. $A-B$; c. $B+A$; d. $B-A$.

$$\text{a. } A+B = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+3 & 2+6 & 3+1 \\ 4+2 & 7+1 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } A-B = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-3 & 2-6 & 3-1 \\ 4-2 & 7-1 & 8-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } B+A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+9 & 6+2 & 1+3 \\ 2+4 & 1+7 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } B-A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-9 & 6-2 & 1-3 \\ 2-4 & 1-7 & 0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -2 \\ -2 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Syarat Operasi

- Ukuran matriks harus sama

Sifat Operasi

- $A+B=B+A$ (Komutatif)
- $A-B \neq B-A$ (Tidak Komutatif)

Penjumlahan dan Pengurangan. Dua buah matriks (A dan B) dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila kedua matriks ber-ordo atau berukuran sama. Jika ukuran kedua matriks tidak sama, maka operasi penjumlahan dan pengurangan tidak dapat dilakukan atau tidak berlaku.

Contoh. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 15 & 17 & 21 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} ; D = \begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Tentukan: a. $A + B$; b. $A + C$; c. $B - A$; g. $D - B$

$$\text{a. } A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 15 & 17 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 18 \\ 19 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } A+C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ Tidak bisa dioperasikan}$$

$$\text{c. } B-A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 15 & 17 & 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 8 \\ 11 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } D-B = \begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 \\ 15 & 17 & 21 \end{bmatrix} \text{ Tidak bisa dioperasikan}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

2. Perkalian Matriks dengan Skalar

Perkalian Matriks dengan Skalar.

Perkalian matriks A dengan skalar k akan menghasilkan matriks yang semua elemen–elemennya merupakan hasil perkalian skalar dengan semua elemen matriks tersebut.

Sifat Operasi

- $kA = Ak$ (Komutatif)
- $k(A + B) = kA + kB$ (Distributif)
- $k(A - B) = kA - kB$ (Distributif)
- $K(IA) = (kI)A$; I matriks Identitas
- $(k+I)A = kA + IA$; I matriks Identitas
- $1A = A$
- $(-1)A = -A$

$$kA = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh. $A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

a. $2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 8 & 12 & 18 \end{bmatrix}$

b. $3A - \frac{1}{2}B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 12 & 18 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 5 & 6 & 14 \\ 11 & 15 & 31 \end{bmatrix}$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

3. Perkalian Antar Matriks

Syarat Operasi:

- Jumlah kolom matriks A harus sama dengan jumlah baris matriks B

$$\begin{matrix} A & \times & B & = & C \\ m \times n & & n \times p & & m \times p \end{matrix}$$

Sifat Operasi

- Tidak komutatif : $AB \neq BA$
- Asosiatif : $AB(C) = A(BC)$
- Perkalian matriks bersifat Distributif.
 - Distribusi kiri : $A(B+C) = AB+AC$
 - Distribusi kanan : $(B+C)A = BA+CA$
- Dalam perkalian matriks yang hanya memuat matriks-matriks persegi dengan ordo yang sama, terdapat sebuah matriks Identitas yakni matriks satuan I, yang bersifat : $AI=IA=A$
- Jika $AB=AC$ maka belum tentu $B=C$
- Jika $AB=0$ maka belum tentu $A=0$ atau $B=0$
- Jika p dan q skalar maka $(pA)(qB) = (pq)(AB)$

Perkalian Antar Matriks. Dua buah matriks (A dan B) dapat dikalikan ($A \times B$) jika banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyaknya baris pada matriks B.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$
$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Dimana:

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}; \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2}; \\ c_{13} &= a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + \dots + a_{1n}b_{n3}; \\ &\vdots \\ c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}; \end{aligned}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

3. Perkalian Antar Matriks

Syarat Operasi:

- Jumlah kolom matriks A harus sama dengan jumlah baris matriks B

$$\begin{matrix} A & \times & B & = & C \\ m \times n & & n \times p & & m \times p \end{matrix}$$

Sifat Operasi

- Tidak komutatif : $AB \neq BA$
- Asosiatif : $AB(C) = A(BC)$
- Perkalian matriks bersifat Distributif.
 - Distribusi kiri : $A(B+C) = AB+AC$
 - Distribusi kanan : $(B+C)A = BA+CA$
- Dalam perkalian matriks yang hanya memuat matriks-matriks persegi dengan ordo yang sama, terdapat sebuah matriks Identitas yakni matriks satuan I, yang bersifat : $AI = IA = A$
- Jika $AB=AC$ maka belum tentu $B=C$
- Jika $AB=0$ maka belum tentu $A=0$ atau $B=0$
- Jika p dan q skalar maka $(pA)(qB) = (pq)(AB)$

Contoh. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-3)(3) + (0)(-2) & (-3)(0) + (0)(5) & (-3)(6) + (0)(-1) \\ (1)(3) + (-4)(-2) & (1)(0) + (-4)(5) & (1)(6) + (-4)(-1) \\ 11(3) + (6)(-2) & 11(0) + (6)(5) & 11(6) + (6)(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 11 & -20 & 10 \\ 21 & 30 & 60 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 11 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (3)(-3) + (0)(1) + (6)(11) & (3)(0) + (0)(-4) + (6)(6) \\ (-2)(-3) + (5)(1) + (-1)(11) & (-2)(0) + (5)(-4) + (-1)(6) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 57 & 36 \\ 0 & -26 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

3. Perkalian Antar Matriks

Syarat Operasi:

- Jumlah kolom matriks A harus sama dengan jumlah baris matriks B

$$\begin{matrix} A & \times & B & = & C \\ m \times n & & n \times p & & m \times p \end{matrix}$$

Sifat Operasi

- Tidak komutatif : $AB \neq BA$
- Asosiatif : $AB(C) = A(BC)$
- Perkalian matriks bersifat Distributif.
 - Distribusi kiri : $A(B+C) = AB+AC$
 - Distribusi kanan : $(B+C)A = BA+CA$
- Dalam perkalian matriks yang hanya memuat matriks-matriks persegi dengan ordo yang sama, terdapat sebuah matriks Identitas yakni matriks satuan I, yang bersifat : $AI=IA=A$
- Jika $AB=AC$ maka belum tentu $B=C$
- Jika $AB=0$ maka belum tentu $A=0$ atau $B=0$
- Jika p dan q skalar maka $(pA)(qB) = (pq)(AB)$

Contoh. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} BA - 2C &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 36 \\ 7 & -26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 36 \\ 9 & -32 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D + AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 11 & -20 & 10 \\ 0 & 30 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -15 \\ 14 & -19 & 8 \\ 2 & 30 & 17 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

4. Transpose Matriks

Transpose Matriks (A^T). Operasi untuk mengubah struktur dan elemen baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Jika ukuran A adalah $m \times n$ maka ukuran dari A^T adalah $n \times m$

$$\text{Jika } A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ maka } A_{n \times m}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sifat Operasi

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = k(A)^T$ untuk skalar k
- $(AB)^T = B^T A^T$

Contoh.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

Matriks Simetris

Matriks bujur sangkar A disebut symmetric jika $A = A^T$

Matriks Skew-symmetric

Matriks bujur sangkar A disebut skew-symmetric jika $A^T = -A$

Contoh.

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ b & c & 6 \end{bmatrix}$ simetri, tentukan nilai a, b dan c .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ b & c & 6 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 4 & c \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = A^T \Rightarrow a = 2, b = 3, c = 5$$

OPERASI-OPERASI PADA MATRIKS

5. Kesamaan Matriks

Kesamaan Matriks. Dua buah matriks $A=(a_{ij})$ dan $B=(b_{ij})$ dikatakan sama atau $A=B$, jika ukurannya sama dan berlaku $a_{ij}=b_{ij}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$A = B \text{ jika } a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{13} = b_{13}, \dots, a_{ij} = b_{ij}$$

Contoh.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

maka $A = B, A \neq C, B \neq C$

Contoh.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & y-2 & 1 \\ 2 & 4 & z \\ x & 1 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & x+y \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Tentukan x, y dan z agar $A=B$

$$* x = -3$$

$$* y - 2 = 4 \text{ atau } y = 6$$

$$* z = x + y \text{ atau } z = (-3) + 6 = 3$$

SOAL LATIHAN

1. Tentukan x, y, z dan w yang memenuhi:

$$\text{a. } \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & x & 6 \\ -1 & 2 & y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z+1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 0.5w \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{bmatrix} 3x & 0.5y \\ 2z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y+1 \\ 5 & z+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2+y \\ 0.25z & 4 \end{bmatrix}$$

2. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & -2 \\ 6 & 10 & 0 & -6 \\ 8 & 4 & 4 & 12 \\ 3 & 6 & -12 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & -5 \\ -3 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- $3A+0.5B-2C$
- $2A-4B+3C$
- $4A+(3B-C)$
- $(A-B)-(2B+C)$
- $2A-BC$
- $AB-C$
- $A(B+C)$

SOAL LATIHAN

3. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & -2 \\ 6 & 10 & 0 & -6 \\ 8 & 4 & 4 & 12 \\ 3 & 6 & -12 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & -5 \\ -3 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- $(2A + 0.5B)(B - 2C)$
- $(A^T - 3B^T)(A + C)$
- $(4A^2 + B^2)(2B^T - 3C^T)$
- $(A - B)^T - (2B^T + C)$
- $2A^T - (BC)^T$
- $AB - C^T$
- $A^T(B^T + C^T)$

4. Diketahui matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

- $B + C$
- $AB + AC$
- $A(B + C)$
- $(AB)^T$ dan $(AC)^T$
- $B^T A^T$ dan $(AC)^T$