FAKULTAS ILMU KOMPUTER
UNIVERSITAS DIAN NUSWANTORO

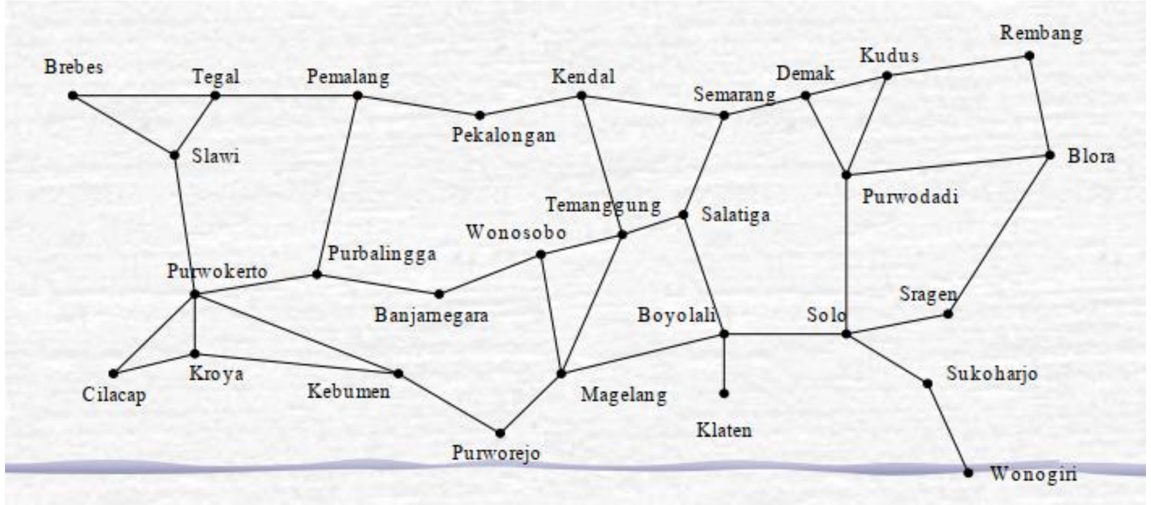
MATEMATIKA DISKRIT

PERTEMUAN 8

TERMINOLOGI DASAR GRAF

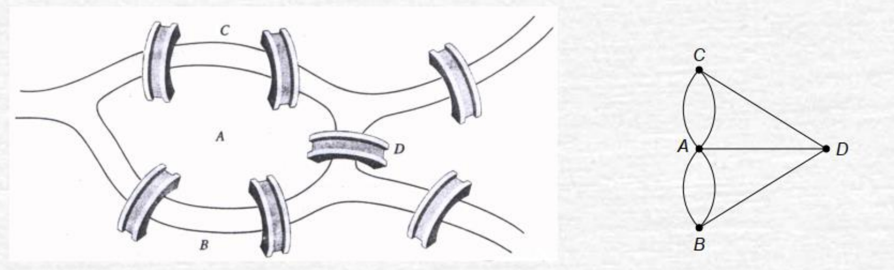
PENDAHULUAN

- Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.
- Gambar di bawah ini sebuah graf yang menyatakan peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Tengah.



PENDAHULUAN

Sejarah Graf: masalah jembatan Königsberg (tahun 1736)



Gambar 1. Masalah Jembatan Königsberg

Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg:

Simpul (*vertex*) → menyatakan daratan

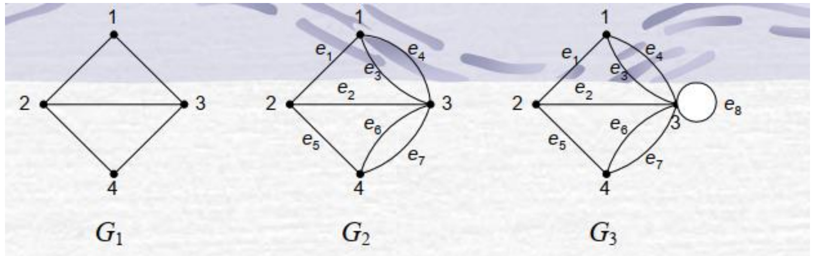
Sisi (*edge*) → menyatakan jembatan

- Bisakah melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?

DEFINISI GRAF

- Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:
  V = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)
  $= \{ v1 , v2 , ... , vn \}$
  E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul
  $= \{e1 , e2 , ... , en \}$

DEFINISI GRAF



Gambar 2. (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

- **Contoh 1.** Pada Gambar 2, $G1$ adalah graf dengan
  V = { 1, 2, 3, 4 } E = { (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) }
  $G2$ adalah graf dengan
  V = { 1, 2, 3, 4 }
  E = { (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) }
  = { $e1$, $e2$, $e3$, $e4$, $e5$, $e6$, $e7$}
  $G3$ adalah graf dengan
  V = { 1, 2, 3, 4 }
  E = { (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) }
  = { $e1$, $e2$, $e3$, $e4$, $e5$, $e6$, $e7$, $e8$}

DEFINISI GRAF

- Pada $G2$, sisi $e3$ = (1, 3) dan sisi $e4$ = (1, 3) dinamakan **sisiganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.

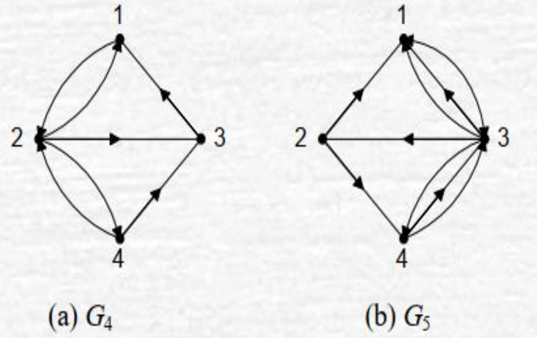
- Pada $G3$, sisi $e8$ = (3, 3) dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

JENIS – JENIS GRAF

- Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:
  1. **Graf sederhana** (*simple graph*).
  Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. *G*1 pada Gambar 2 adalah contoh: graf sederhana
  2. **Graf tak-sederhana** (*unsimple-graph*).
  Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*). *G*2 dan *G*3 pada Gambar 2 adalah contoh graf tak-sederhana

JENIS – JENIS GRAF

- Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:
  1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)
  Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Tiga buah graf pada Gambar 2 adalah graf tak-berarah.
  2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)
  Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Dua buah graf pada Gambar 3 adalah graf berarah.



Gambar 3 (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

JENIS – JENIS GRAF

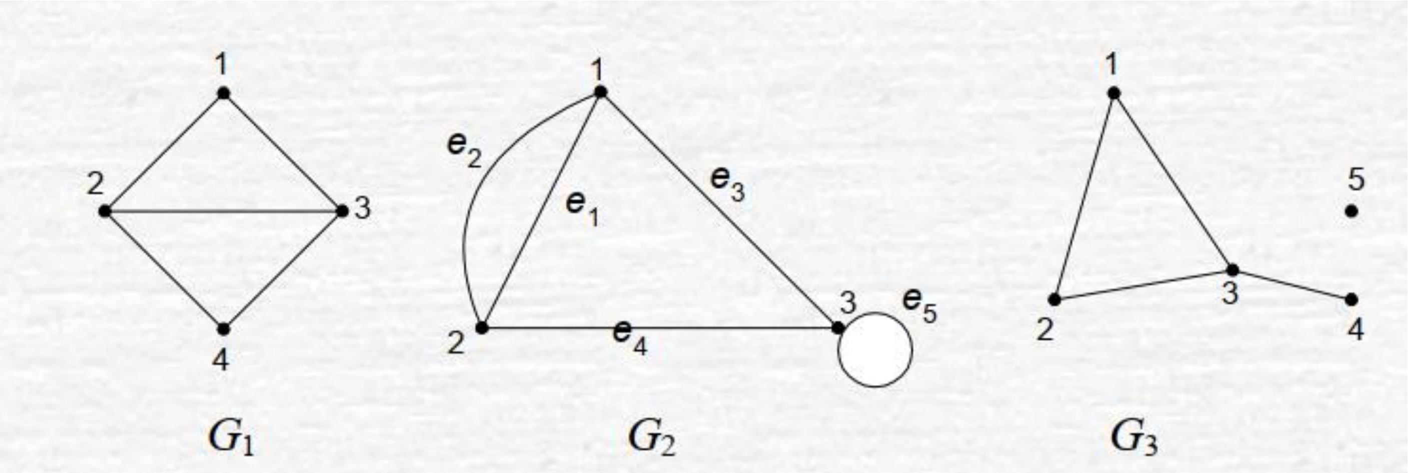
Tabel 1 Jenis-jenis graf [ROS99]

Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf-ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

TERMINOLOGI DASAR GRAF

1. Ketetanggaan (*Adjacent*)
Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.
Tinjau graf *G*1 : simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,
simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.

•



TERMINOLOGI DASAR GRAF

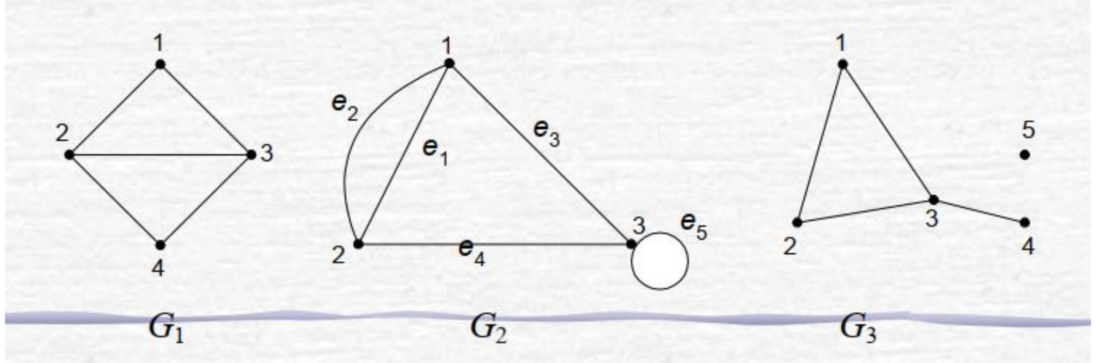
2. Bersisian (*Incidency*)

Untuk sembarang sisi *e* = (*vj*, *vk*) dikatakan

e bersisian dengan simpul *vj* , atau

e bersisian dengan simpul *vk*

Tinjau graf *G*1: sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3, sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4, tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4.

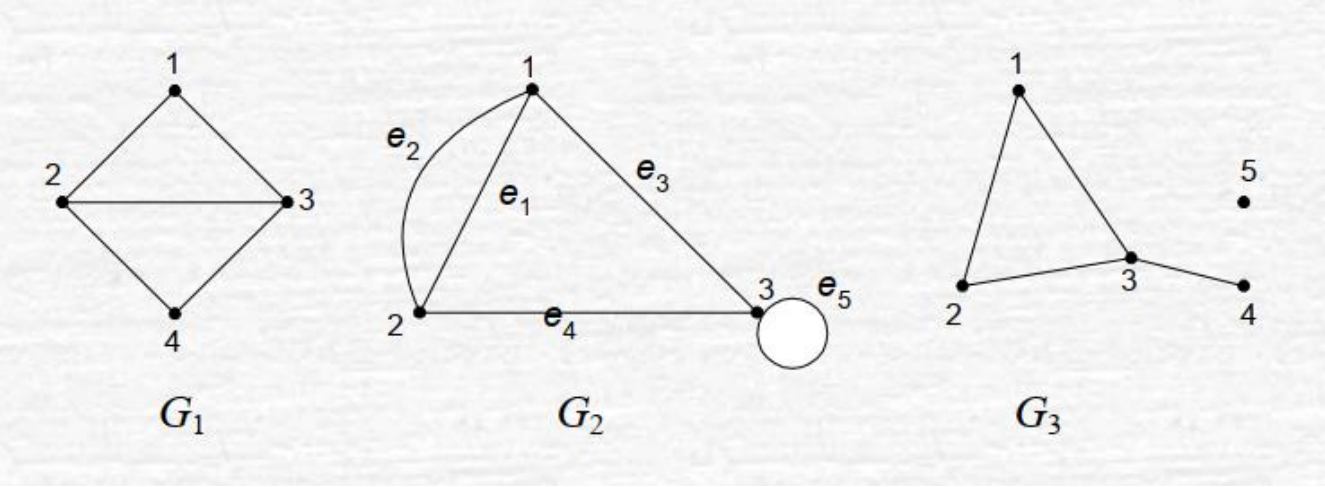


TERMINOLOGI DASAR GRAF

3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

Tinjau graf *G*3: simpul 5 adalah simpul terpencil.

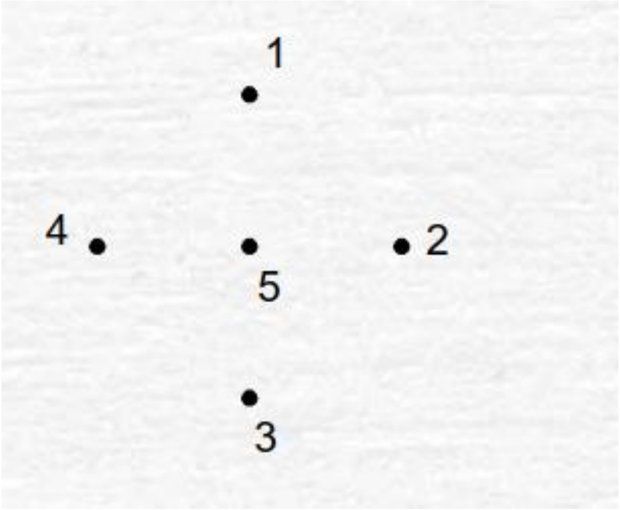


TERMINOLOGI DASAR GRAF

4. **Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)**

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong (*Nn*).

Graf *N*5 :



TERMINOLOGI DASAR GRAF

5. Derajat (*Degree*)

Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi: $d(v)$

Tinjau graf $G1$: $d(1) = d(4) = 2$

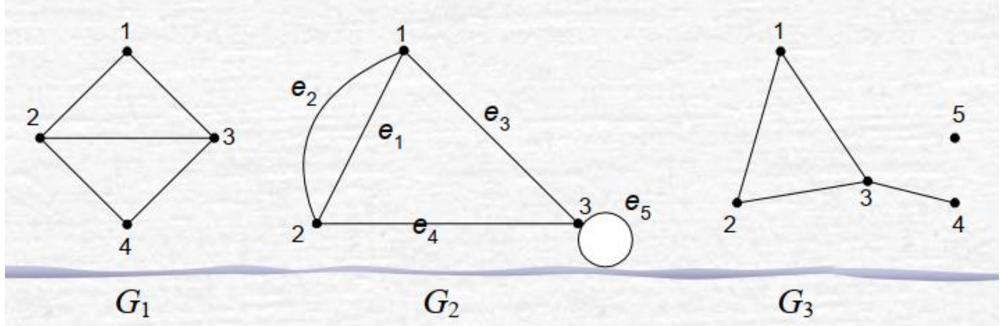
$d(2) = d(3) = 3$

Tinjau graf $G3$: $d(5) = 0$ → simpul terpencil

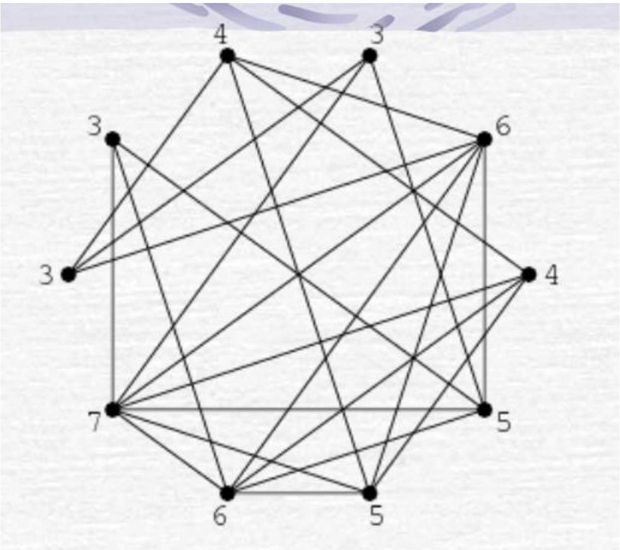
$d(4) = 1$ → simpul anting-anting (*pendant vertex*)

Tinjau graf $G2$: $d(1) = 3$ → bersisian dengan sisi ganda

$d(2) = 4$ → bersisian dengan sisi gelang (*loop*)

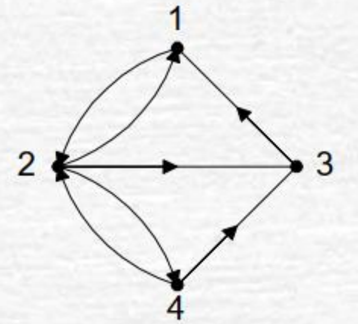


TERMINOLOGI DASAR GRAF



Pada graf di atas, derajat setiap simpul ditunjukkan pada masing-masing simpul

TERMINOLOGI DASAR GRAF

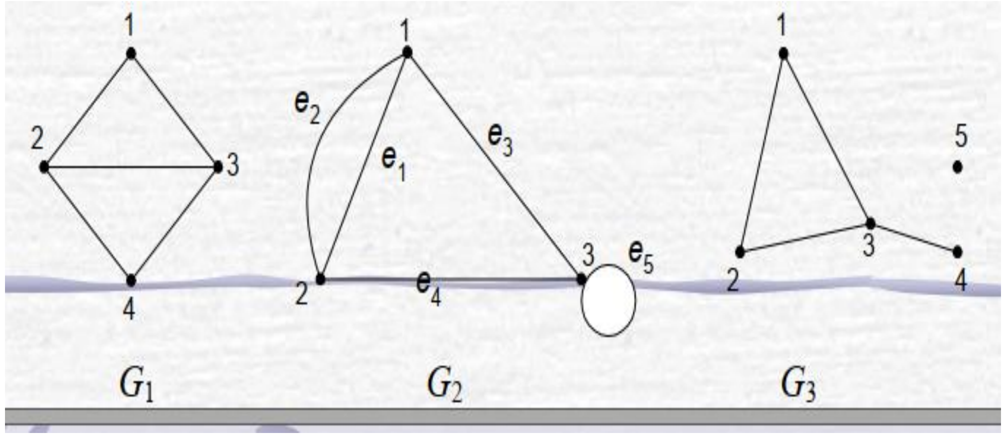


G_4

Tinjau graf *G*4:
*d*in(1) = 2; *d*out(1) = 1
*d*in(2) = 2; *d*out(2) = 3
*d*in(3) = 2; *d*out(3) = 1
*d*in(4) = 1; *d*out(3) = 2

TERMINOLOGI DASAR GRAF

Lemma Jabat Tangan. Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.
Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka $\sum_{v=V} d(v) = 2|E|$
Tinjau graf $G1$: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$
Tinjau graf $G2$: $d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 3 + 4 = 10$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$
Tinjau graf $G3$: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$
$= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$
$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 4$



TERMINOLOGI DASAR GRAF

Akibat dari lemma (corollary):

Teorema: Untuk sembarang graf G, banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

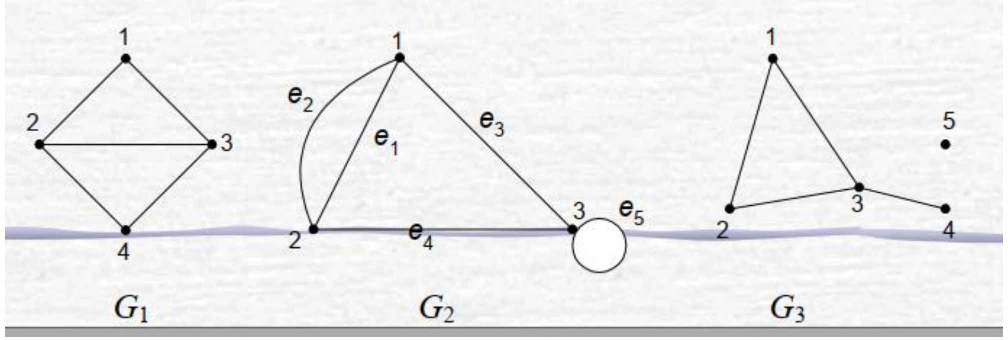
TERMINOLOGI DASAR GRAF

6. Lintasan (*Path*)

Lintasan yang panjangnya *n* dari simpul awal *v*0 ke simpul tujuan *vn* di dalam graf *G* ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk *v*0, *e*1, *v*1, *e*2, *v*2,... , *vn* –1, *en*, *vn* sedemikian sehingga *e*1 = (*v*0, *v*1), *e*2 = (*v*1, *v*2), ... , *en* = (*vn*-1, *vn*) adalah sisi-sisi dari graf *G*.

Tinjau graf *G*1: lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3).

Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada *G*1 memiliki panjang 3.



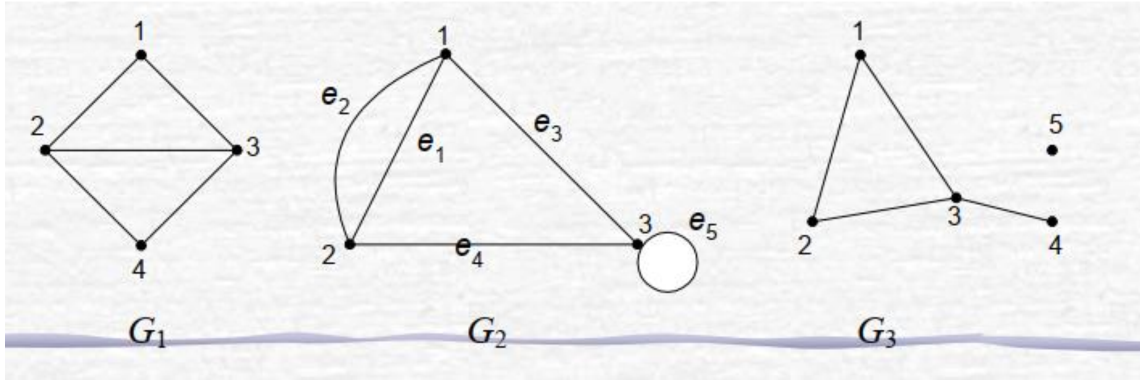
TERMINOLOGI DASAR GRAF

7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.

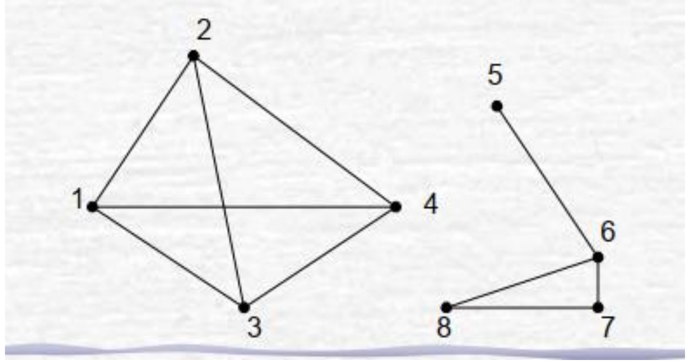
Tinjau graf *G*1: 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.

Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada *G*1 memiliki panjang 3



TERMINOLOGI DASAR GRAF

8. Terhubung (*Connected*)
Dua buah simpul $v1$ dan simpul $v2$ disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari $v1$ ke $v2$. G disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul vi dan vj dalam himpunan V terdapat lintasan dari vi ke vj.
Jika tidak, maka G disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).
Contoh graf tak-terhubung:

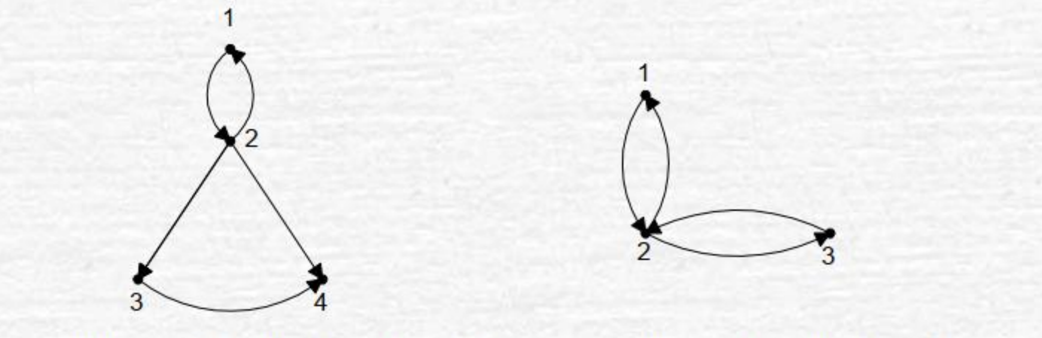


TERMINOLOGI DASAR GRAF

Graf berarah *G* dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari *G* diperoleh dengan menghilangkan arahnya).

- Dua simpul, *u* dan *v*, pada graf berarah *G* disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari *u* ke *v* dan juga lintasan berarah dari *v* ke *u*.
- Jika *u* dan *v* tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka *u* dan *v* dikatakan **terhubung lemah** (*weakly coonected*)

Graf berarah *G* disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang *u* dan *v* di *G*, terhubung kuat. Kalau tidak, *G* disebut **graf terhubung lemah**.



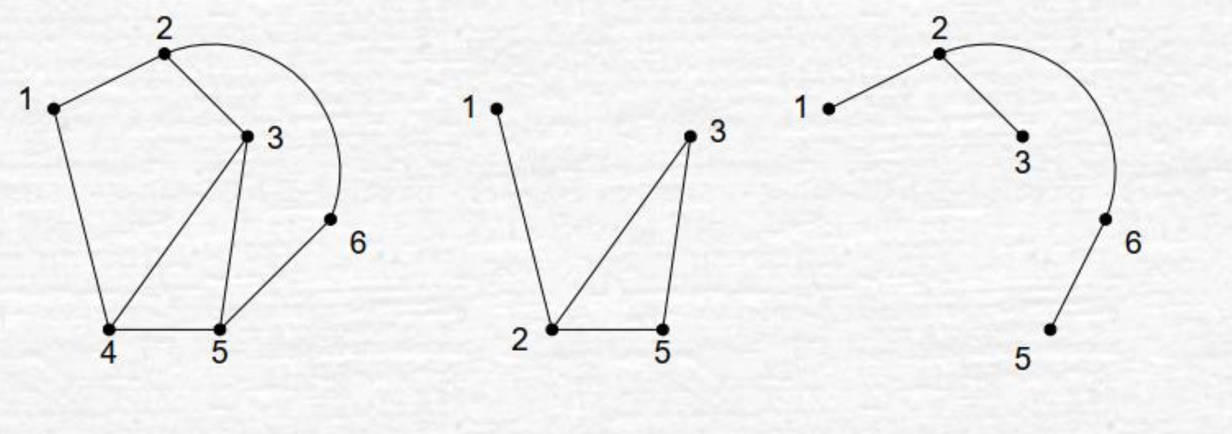
graf berarah terhubung lemah graf berarah terhubung kuat

TERMINOLOGI DASAR GRAF

9. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G1 = (V1, E1)$ adalah **upagraf** (*subgraph*) dari G jika $V1 \subseteq V$ dan $E1 \subseteq E$.

Komplemen dari upagraf $G1$ terhadap graf G adalah graf $G2 = (V2, E2)$ sedemikian sehingga $E2 = E - E1$ dan $V2$ adalah himpunan simpul yang anggota-anggota $E2$ bersisian dengannya.

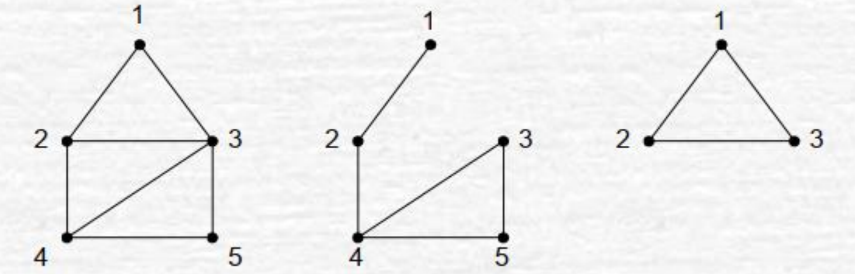


(a) Graf G_1 (b) Sebuah upagraf (c) komplemen dari upagraf (b)

TERMINOLOGI DASAR GRAF

10. Upagraf Rentang (*Spanning Subgraph*)

Upagraf $G1 = (V1, E1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraf rentang** jika $V1 = V$ (yaitu $G1$ mengandung semua simpul dari G).



(a) graf *G*, (b) upagraf rentang dari *G*, (c) bukan upagraf rentang dari *G*

TERMINOLOGI DASAR GRAF

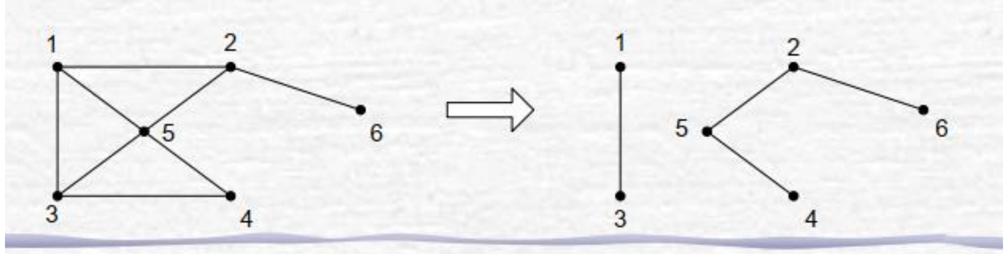
11. *Cut-Set*

Cut-set dari graf terhubung *G* adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari *G* menyebabkan *G* tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah komponen.

Pada graf di bawah, {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah *cut-set*.

Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung.

Himpunan {(1,2), (2,5)} juga adalah *cut-set*, {(1,3), (1,5), (1,2)} adalah *cut-set*, {(2,6)} juga *cut-set*, tetapi {(1,2), (2,5), (4,5)} bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, {(1,2), (2,5)} adalah *cut-set*.

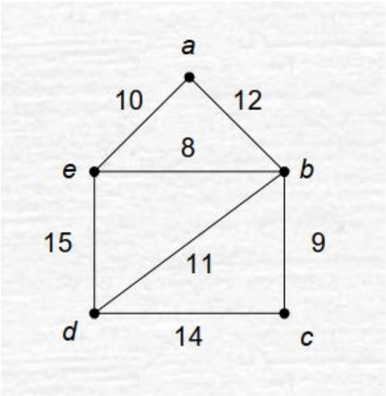


(a) (b)

TERMINOLOGI DASAR GRAF

12. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



LATIHAN SOAL

- Gambarkan graf di bawah dengan ketenttuan:

1. 6 simpul dengan derajat masing – masing 7, 3, 4, 6, 5, 3
2. 5 simpul, 2 loop, 2 pasang sisi ganda dengan derajat masing – masing 7, 2, 4, 5, 4
3. 6 simpul dengan derajat masing – masing 5, 7, 4, 2, 6, 6
4. 5 simpul, 2 loop, 3 pasang sisi ganda dengan derajat masing – masing 7, 5, 7, 3, 4
5. 5 simpul dengan derajat masing – masing 3, 2, 7, 6, 4
6. 5 simpul, 2 loop, 3 pasang sisi ganda dengan derajat masing – masing 7, 4, 6, 5, 4
7. 5 simpul dengan derajat masing – masing 7, 7, 6, 5, 5

LATIHAN SOAL

8. 5 simpul, 3 loop, 3 pasang sisi ganda dengan derajat 7, 7, 7, 3, 4
9. 5 simpul dengan derajat masing – masing 7, 1, 6, 4, 4
10. 5 simpul, 2 loop, 2 pasang sisi ganda dengan derajat 6, 4, 3, 5, 4
11. 6 simpul dengan derajat 7, 4, 8, 5, 5, 3
12. 6 simpul, 2 loop, 3 pasang sisi ganda dengan derajat 7, 4, 4, 3, 6, 2

TERIMAKASIH