FAKULTAS ILMU KOMPUTER
UNIVERSITAS DIAN NUSWANTORO

# MATEMATIKA DISKRIT

PERTEMUAN 5 : PRINSIP INDUKSI MATEMATIKA SEDERHANA

# DEFINISI

- Metode pembuktian untuk pernyataan perihal bilangan bulat adalah **induksi matematik**.

Contoh :

- $p(n)$: "Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai $n$ adalah $n(n + 1)/2$".
- Buktikan $p(n)$ benar!

Contoh lain:

- Setiap bilangan bulat positif $n$ ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.
- Untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.
- Untuk membayar biaya pos sebesar $n$ sen dolar ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen dolar.
- Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali. Jika ada $n$ orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n +1)/2$.
- Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan $n$ elemen adalah $2^n$

# DEFINISI

- Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika.
- Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

# PRINSIP INDUKSI MATEMATIKA SEDERHANA

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif.
- Perlu dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n$
- **Untuk membuktikan pernyataan ini, perlu ditunjukkan bahwa:**
  1. **$p(1)$ benar, dan**
  2. **jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$,**

- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.
- Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.
- Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n$.

# PRINSIP INDUKSI MATEMATIKA SEDERHANA

- Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa jumlah $n$ buah bilangan ganjil positif pertama adalah $n^2$!
- Penyelesaian:
  1. *Basis induksi*: Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.
  2. *Langkah induksi*: Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan
     $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
     adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke-$n$ adalah $(2n - 1)$]. Harus diperliahtkan bahwa $p(n +1)$ juga benar, yaitu

# PRINSIP INDUKSI MATEMATIKA SEDERHANA

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$ juga benar.

Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\
&= n^2 + (2n + 1) \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n + 1)^2
\end{aligned}
$$

- Karena langkah *1* dan *2* keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah $n$ buah bilangan ganjil positif pertama adalah $n^2$.

## PRINSIP INDUKSI YANG DIRAMPATKAN

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan ingin dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.
- Untuk membuktikan ini, perlu ditunjukkan bahwa:
  1. $p(n_0)$ benar, dan
  2. jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$

# PRINSIP INDUKSI YANG DIRAMPATKAN

1. *Basis induksi*. Untuk $n$ = 0 (bilangan bulat tidak negative pertama), diperoleh: $2^0 = 2^{0+1} - 1$.

   Ini jelas benar, sebab $2^0 = 1$

   $= 2^{0+1} - 1$

   $= 2^1 - 1$

   $= 2 - 1$

   $= 1$

2. *Langkah induksi*. Andaikan bahwa p(n) benar, yaitu

   $$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

   adalah benar (hipotesis induksi).

   Kita harus menunjukkan bahwa p(n +1) juga benar, yaitu

   $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$ juga benar,

# PRINSIP INDUKSI YANG DIRAMPATKAN

Ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} \\
&= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \text{ (hipotesis induksi)} \\
&= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\
&= (2 \,.\, 2^{n+1}) - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}
$$

- Karena langkah *1* dan *2* keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

# MATERI PENGAYAAN : PRINSIP INDUKSI KUAT

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan ingin dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.
- Untuk membuktikan ini, perlu ditunjukkan bahwa:
  1. $p(n_0)$ benar, dan
  2. jika $p(n_0)$, $p(n_0 + 1)$, …, $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$,

# MATERI PENGAYAAN : PRINSIP INDUKSI KUAT

Contoh:

- Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif $n$ ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

1. *Basis induksi*. Jika $n = 2$, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

# MATERI PENGAYAAN : PRINSIP INDUKSI KUAT

2. *Langkah induksi*
   - Misalkan pernyataan bahwa bilangan 2, 3, …, $n$ dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi)
   - Buktikan bahwa $n + 1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
   - Ada dua kemungkinan nilai n + 1:
     - Jika $n + 1$ = bilangan prima, → jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.
     - Jika $n + 1$ bukan bilangan prima, → terdapat bilangan bulat positif $a$ yang membagi habis $n + 1$ tanpa sisa. Dengan kata lain,

       $(n + 1)/ a = b$ atau $(n + 1) = ab$, (yang dalam hal ini, $2 \leq a \leq b \leq n$)
     - Menurut hipotesis induksi, $a$ dan $b$ dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, n + 1 jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$.

- Karena langkah *1* dan *2* sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif $n$ ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

# LATIHAN SOAL

**Dengan Induksi matematika sederhana, Buktikan rumus deret di bawah**
**Ingat ! Prinsip induksi matematika adalah menyamakan ruas kiri menjadi ruas kanan pada p(n+1), bukan menjabarkan ruas kiri dan kanan**

1. $1(2) + 2(3) + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
2. $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
3. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
4. $1(4) + 2(5) + 3(6) + \ldots + n(n+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$
5. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
6. $\frac{1}{1(3)} + \frac{1}{2(4)} + \frac{1}{3(5)} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$
7. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n\,(n+1)$
8. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$
9. $5 + 8 + 11 + \cdots + (3n+2) = \frac{n(3n+7)}{2}$
10. $7 + 11 + 15 + \cdots + (4n+3) = 2n^2 + 5n$

# TERIMAKASIH