FAKULTAS ILMU KOMPUTER
UNIVERSITAS DIAN NUSWANTORO

MATEMATIKA DISKRIT

PERTEMUAN 4 : FUNGSI

DEFINISI

- Misalkan *A* dan *B* himpunan
- Relasi biner *f* dari *A* ke *B* merupakan suatu fungsi jika *setiap* elemen di dalam *A* dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam *B*.

- Jika *f* adalah fungsi dari *A* ke *B* kita menuliskan

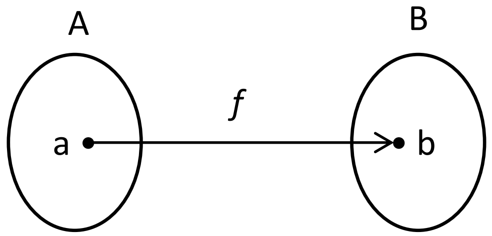
  $$f : A \rightarrow B$$

  yang artinya *f* **memetakan** *A* ke *B*.

- *A* disebut **daerah asal** (*domain*) dari *f* dan *B* disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari *f*
- Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**
- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen *a* di dalam *A* dihubungkan dengan elemen *b* di dalam *B*.

DEFINISI

- Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B.



DEFINISI

- Fungsi adalah relasi yang khusus:
  - Tiap elemen di dalam himpunan A harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f
  - Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$

DEFINISI

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, di antaranya:

1. Himpunan pasangan terurut.
   - Seperti pada relasi
2. Formula pengisian nilai (*assignment*).
   - Contoh: $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$.
3. Kata-kata
   - Contoh: "*f* adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner".

4. Kode program (*source code*)

Contoh: Fungsi menghitung $|x|$

```
function abs(x:integer):integer;
begin
   if x < 0 then
      abs:=-x
   else
      abs:=x;
end;
```

DEFINISI

- **Contoh:** Suatu Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah **fungsi** dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

Contoh *: Suatu realasi* $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah **fungsi** dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

DEFINISI

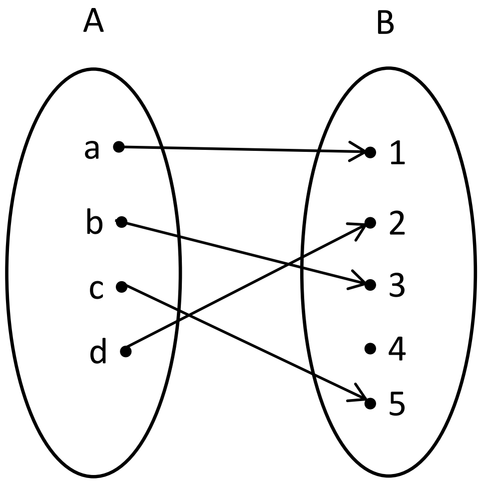
Contoh: Suatu Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B

Contoh: Suatu Relasi $f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B, yaitu u dan v.

JENIS – JENIS FUNGSI

1. Injektif

- Fungsi *f* dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan *A* yang memiliki bayangan sama.



JENIS – JENIS FUNGSI

Contoh

- Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$
  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu,

- Tetapi relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$
  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu,

karena $f(1) = f(2) = u$.

JENIS – JENIS FUNGSI

Contoh : Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$.

- Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-ke-satu?

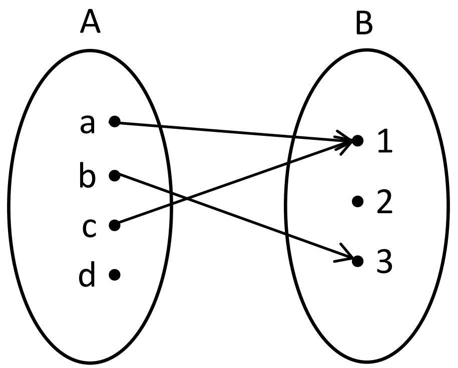
Penyelesaian:

- $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua x yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$
- $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$, $a - 1 \neq b - 1$, misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$

JENIS – JENIS FUNGSI

2. Surjektif

- Fungsi *f* dikatakan dipetakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan *B* merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan *A*.
- Dengan kata lain seluruh elemen *B* merupakan jelajah dari *f*. Fungsi *f* disebut fungsi pada himpunan *B*.



JENIS – JENIS FUNGSI

Contoh

- Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$
  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f

- Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$
  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f

JENIS – JENIS FUNGSI

Contoh : Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$.

- Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

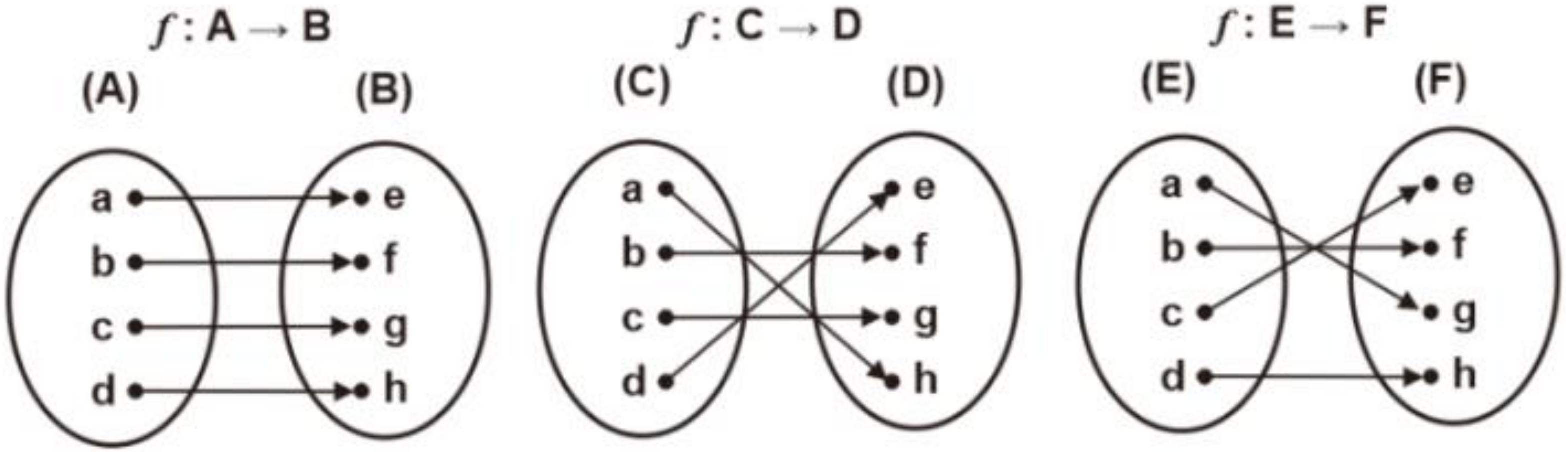
Penyelesaian:

- $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari f
- $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat y, selalu ada nilai x yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$

JENIS – JENIS FUNGSI

3. Bijektif

- Fungsi *f* dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.



JENIS – JENIS FUNGSI

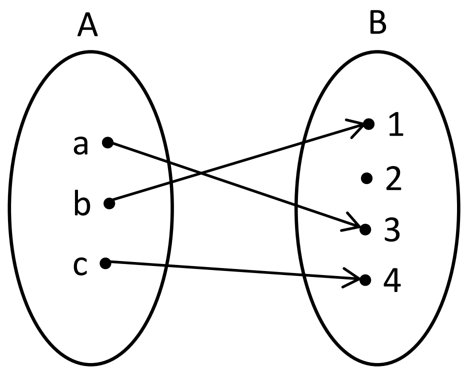
Contoh:

- Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke- satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.
- Fungsi $f(x) = x-1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

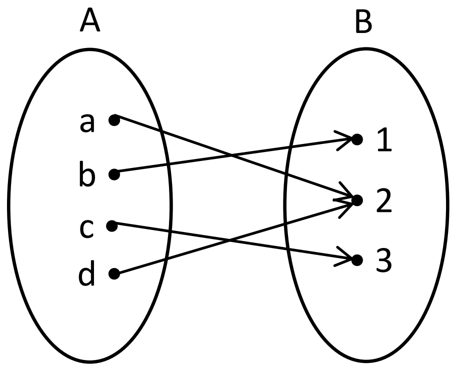
JENIS – JENIS FUNGSI

Contoh :

1. Fungsi satu ke satu (injektif)

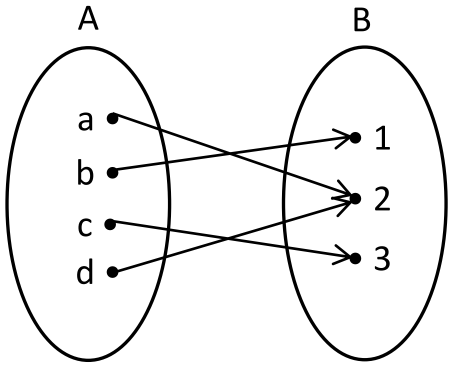


2. Fungsi Pada (Surjektif)

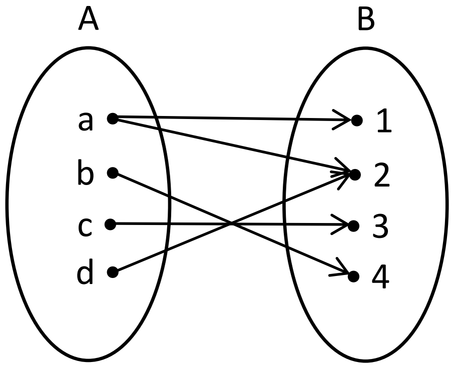


JENIS – JENIS FUNGSI

3. Fungsi saja



4. Bukan Fungsi



FUNGSI INVERS

- Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka dapat ditemukan **balikan** (*invers*) dari f.
- Balikan fungsi dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

Contoh

- Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$
  dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke- satu.

- Balikan fungsi f adalah $f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$
- Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

FUNGSI INVERS

Contoh

- Tentukan balikan fungsi $f(x) = x – 1$.

Penyelesaian:

- Fungsi $f(x) = x – 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.
- Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x – 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y +1$.

- Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya.
- Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada

KOMPOSISI FUNGSI

- **Komposisi dari dua buah fungsi.**
- Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh

- Diberikan fungsi
  - $g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$
    yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi
  - $f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$
    yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$.
- Fungsi komposisi dari A ke C adalah
  - $f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$

KOMPOSISI FUNGSI

Contoh

- Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.
- Penyelesaian:
  - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2$.
  - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

KUIS

1. Diketahui himpunan A = {1,3,4,7,8,9}, B = {p,q,r,s}, C={2,3,5,6,9} dibentuk fungsi – fungsi sebagai berikut :

F1 adalah fungsi dari A ke B = {(1,p), (9,q), (4,s),(7,q), (8,r), (3,s)} dan F2 adalah fungsi dari B ke C = {(p,2), (q,3), (r,6), (s,5)}

a. Tentukan fungsi komposisi (F2 o F1)
b. Tentukan jenis – jenis fungsi F1, F2 dan (F2 o F1)

2. Misalkan g = {(1,b), (2,c), (3,a), (4,b)} adalah fungsi dari A={1, 2, 3, 4} ke B={a, b, c, d} dan f = {(a,x), (b,y), (c,w), (d,z)} adalah fungsi dari B ke C={w, x, y, z}. Tuliskan (f o g) sebagai himpunan pasangan terurut dan apakah f o g merupakan fungsi injektif, surjektif atau bijektif.

3. Tentukan f o g (x) dan g o f(x) pada fungsi f(x) = x + 2 dan g(x) = x^2 – 3x + 5

TERIMAKASIH