



FAKULTAS ILMU KOMPUTER  
UNIVERSITAS DIAN NUSWANTORO

# MATEMATIKA DISKRIT

*PERTEMUAN 12*

*PEWARNAAN GRAF*

## PENDAHULUAN

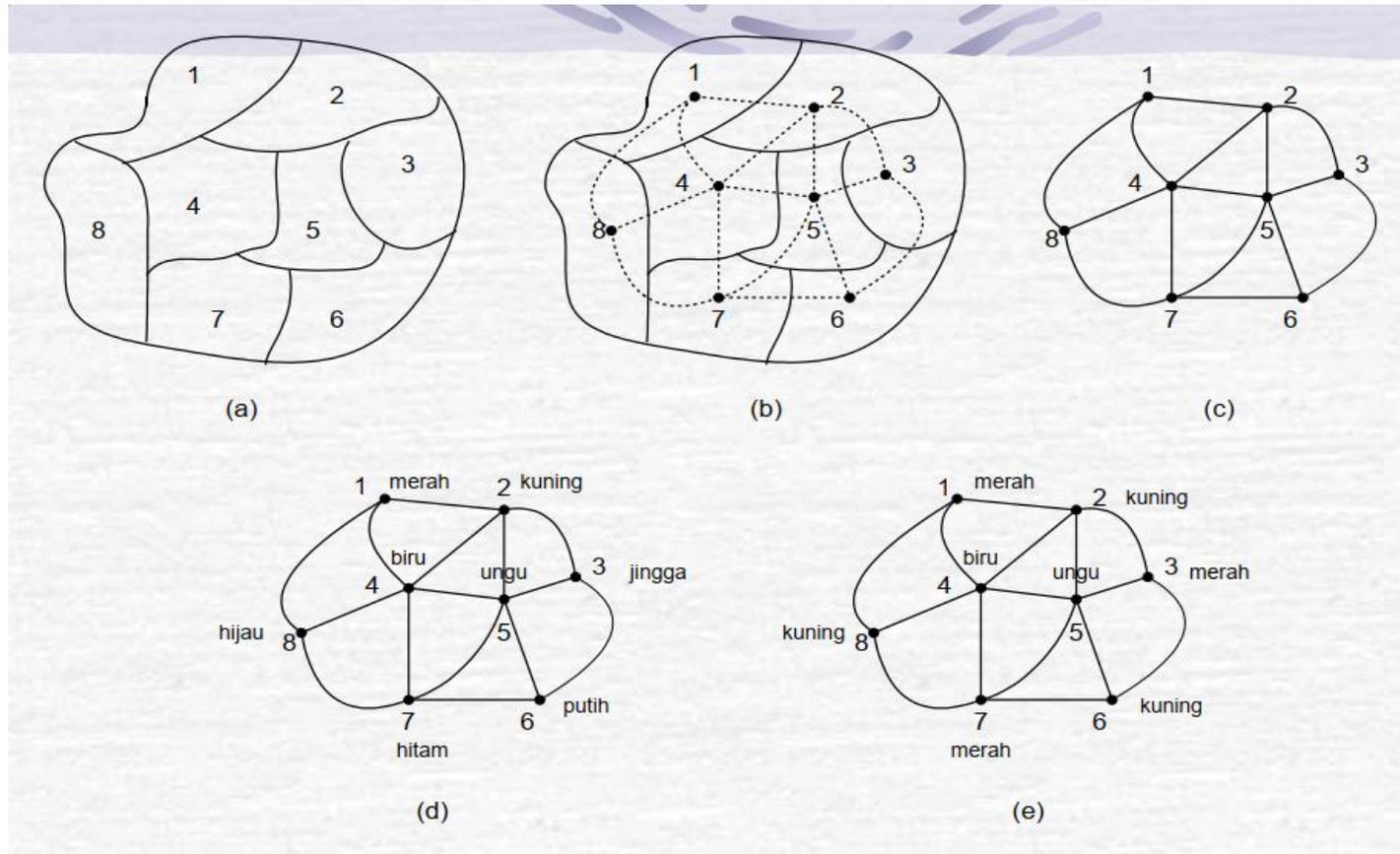
- Ada dua macam: pewarnaan simpul, dan pewarnaan sisi
- Hanya dibahas perwarnaan simpul
- Pewarnaan simpul: memberi warna pada simpul-simpul graf sedemikian sehingga dua simpul bertetangga mempunyai warna berbeda.
- Aplikasi pewarnaan graf: mewarnai peta.
- Peta terdiri atas sejumlah wilayah.
- Wilayah dapat menyatakan kecamatan, kabupaten, provinsi, atau negara.
- Peta diwarnai sedemikian sehingga dua wilayah bertetangga mempunyai warna berbeda.

# PEWARNAAN GRAF



## PEWARNAAN GRAF

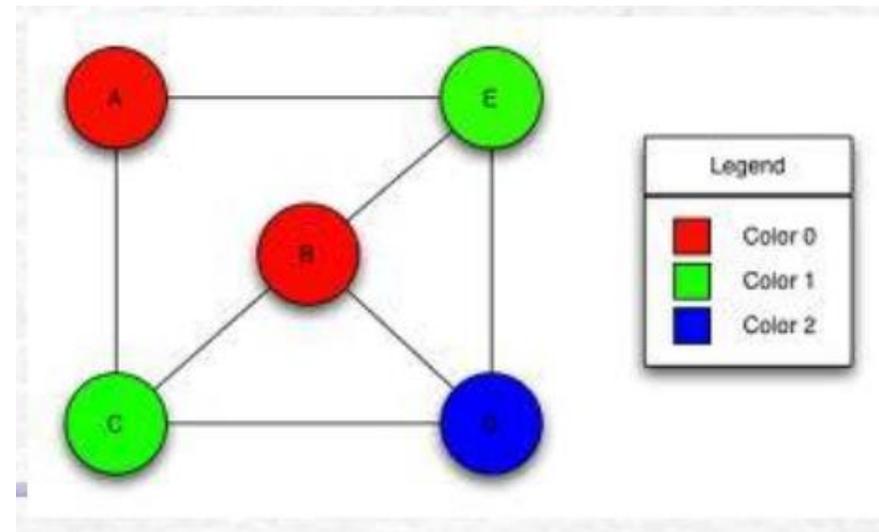
- Nyatakan wilayah sebagai simpul, dan batas antar dua wilayah bertetangga sebagai sisi.
- Mewarnai wilayah pada peta berarti mewarnai simpul pada graf yang berkoresponden.
- Setiap wilayah bertetangga harus mempunyai warna berbeda → warna setiap simpul harus berbeda.



- (a) Peta
- (b) Peta dan graf yang merepresentasikannya
- (c) Graf yang merepresentasikan peta
- (d) Pewarnaan simpul, setiap simpul mempunyai warna berbeda
- (e) Empat warna sudah cukup untuk mewarnai 8 simpul

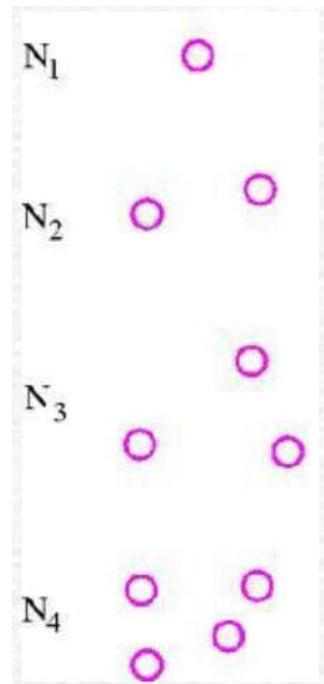
## BILANGAN KROMATIK

- Bilangan kromatik: jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai peta.  
Simbol:  $\chi(G)$ .
- Suatu graf  $G$  yang mempunyai bilangan kromatis  $k$  dilambangkan dengan  $\chi(G) = k$ .  
Graf di bawah ini memiliki  $\chi(G) = 3$



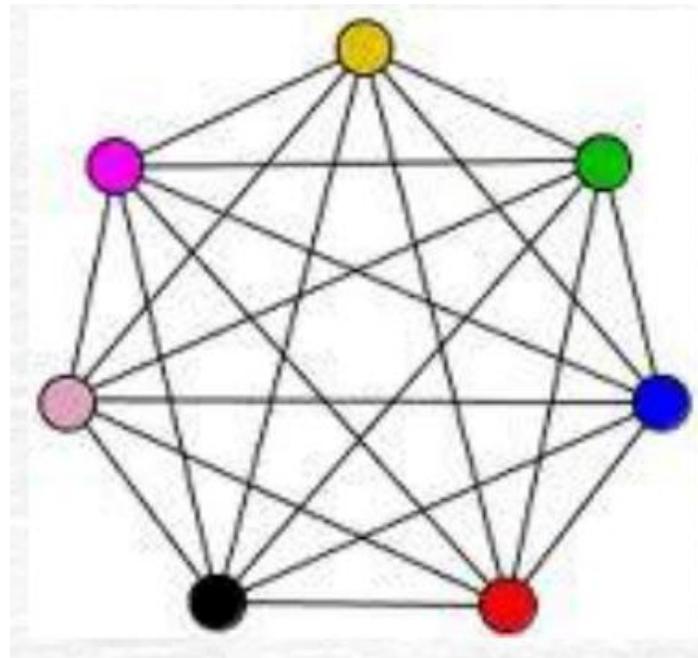
## BILANGAN KROMATIK

- Graf kosong  $N_n$  memiliki  $\chi(G) = 1$ , karena semua simpul tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua simpul cukup dibutuhkan satu warna saja.



## BILANGAN KROMATIK

- Graf lengkap  $K_n$  memiliki  $\chi(G) = n$  sebab semua simpul saling terhubung sehingga diperlukan  $n$  buah warna.



## ALGORITMA WELCH POWELL

- Menentukan warna sebenarnya sangat sulit kecuali dalam kasus-kasus sederhana seperti pada contoh-contoh yang akan kita bahas dalam bab ini
- Algoritma Welch-Powell adalah suatu cara yang efisien untuk mewarnai sebuah graf  $G$ .

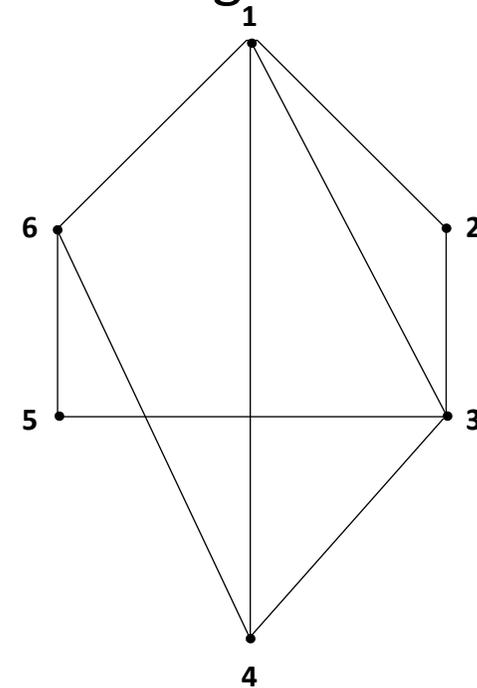
## ALGORITMA WELCH POWELL

1. Urutkan simpul-simpul dari  $G$  dalam urutan derajat yang menurun. Urutan ini mungkin tidak unik karena beberapa simpul mungkin mempunyai derajat yang sama.
2. Gunakan satu warna tertentu untuk mewarnai simpul pertama. Secara berurut, setiap simpul dalam daftar yang tidak berelasi dengan simpul sebelumnya diwarnai dengan warna ini.
3. Ulangi langkah 2 di atas untuk simpul dengan urutan tertinggi yang belum diwarnai.
4. Ulangi langkah 3 di atas sampai semua simpul dalam daftar terwarnai.

## ALGORITMA WELCH POWELL

- Contoh:  
Gunakan algoritma Welch-Powell untuk mewarnai graf di bawah ini dan tentukan bilangan kromatiknya!

Simpul	1	3	6	4	2	5
Derajat	4	4	3	3	2	2
Warna	a	b	b	c	c	a



- Jadi, ,  $\chi(G) = 3$

## ALGORITMA WELCH POWELL

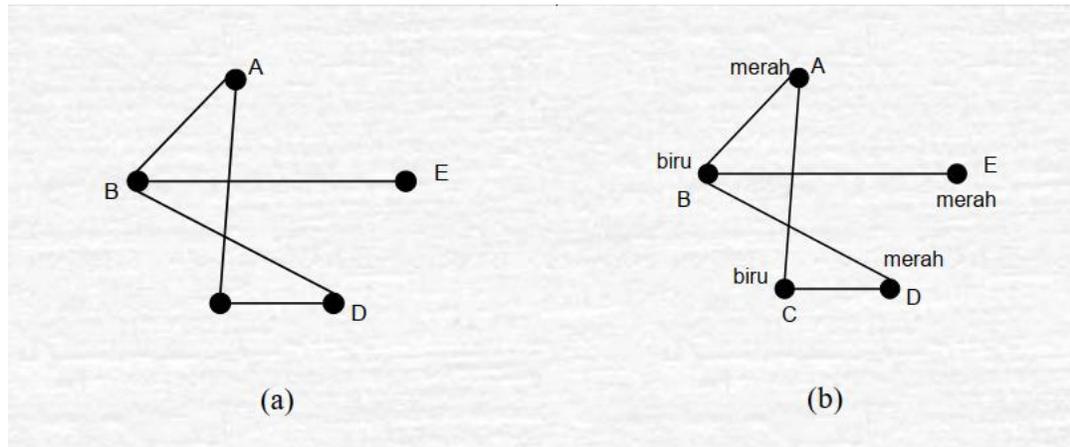
- Misalkan terdapat delapan orang mahasiswa (1, 2, ..., 8) dan lima buah mata kuliah yang dapat dipilihnya ( $A, B, C, D, E$ ). Tabel berikut memperlihatkan matriks lima mata kuliah dan delapan orang mahasiswa. Angka 1 pada elemen  $(i, j)$  berarti mahasiswa  $i$  memilih mata kuliah  $j$ , sedangkan angka 0 menyatakan mahasiswa  $i$  tidak memilih mata kuliah  $j$ .

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0
4	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0
7	1	0	1	0	0
8	0	0	1	1	0

## ALGORITMA WELCH POWELL

- Berapa paling sedikit jumlah hari yang dibutuhkan untuk jadwal ujian tersebut sedemikian sehingga semua mahasiswa dapat mengikuti ujian mata kuliah yang diambilnya tanpa bertabrakan waktunya dengan jadwal ujian kuliah lain yang juga diambilnya?
- Penyelesaian:
  - simpul  $\rightarrow$  mata kuliah
  - sisi  $\rightarrow$  ada mahasiswa yang mengambil kedua mata kuliah (2 simpul)

## ALGORITMA WELCH POWELL



- (a) Graf persoalan penjadwalan ujian 5 mata kuliah untuk 8 orang mahasiswa
- (b) Hasil pewaranan pada simpul-simpul graf
- Bilangan kromatik graf pada Gambar di atas adalah 2.
  - Jadi, ujian mata kuliah *A*, *E*, dan *D* dapat dilaksanakan bersamaan, sedangkan ujian mata kuliah *B* dan *C* dilakukan bersamaan tetapi pada waktu yang berbeda dengan mata kuliah *A*, *E*, dan *D*.

## LATIHAN SOAL

1. Sebuah departemen mempunyai 6 kelompok kerja yang setiap bulannya masing-masing selalu mengadakan rapat satu kali. Keenam kelompok kerja dengan masing-masing anggotanya adalah:  $K1 = \{\text{Amir, Budi, Yanti}\}$ ,  $K2 = \{\text{Budi, Hasan, Tommy}\}$ ,  $K3 = \{\text{Amir, Tommy, Yanti}\}$ ,  $K4 = \{\text{Hasan, Tommy, Yanti}\}$ ,  $K5 = \{\text{Amir, Budi}\}$ ,  $K6 = \{\text{Budi, Tommy, Yanti}\}$ . Berapa banyak waktu rapat berbeda yang harus direncanakan sehingga tidak ada anggota kelompok kerja yang dijadwalkan rapat pada waktu yang sama. Gambarkan graf yang merepresentasikan persoalan ini lalu (jelaskan sisi menyatakan apa, simpul menyatakan apa) tentukan jumlah waktu rapat ini.

## LATIHAN SOAL

2. Terdapat 8 macam zat kimia A, B, C, D, E, F, G, H yang akan disimpan dalam beberapa ruangan. Untuk menghemat biaya maka diperlukan ruangan seminimal mungkin. Untuk itu dikelompokkan daftar zat – zat yang akan meledak jika diletakkan dalam satu ruangan. Gambarkan graf yang menyatakan persoalan di atas, lalu tentukan ada berapa ruangan yang dibutuhkan agar aman dalam penyimpanan. Berikut zat – zat yang tidak bisa disimpan dalam satu ruangan :

Zat Kimia	Tidak bisa disimpan bersama
A	B, D, F
B	A, C, E, F
C	A, B, F, H
D	B, E, G, F
E	B, F, G
F	A, C, D, E, G
G	A, B, C, F, H
H	D, E, G

## LATIHAN SOAL

- Pak Ahmad mempunyai 8 ekor ayam jantan yang suka bertarung jika bertemu dengan ayam jantan yang lain. Berapa banyak kandang minimal yang harus disiapkan Pak Ahmad agar ayam – ayamnya tidak bertarung. Ayam yang mana sajakah yang bisa digabung dalam kandang yang sama, jika data ayam tersebut seperti di bawaah :

Nama Ayam	Suka bertarung dengan
A	B,C
B	A,C,D,F
C	A,B,E
D	B,E,F,G,H
E	C,D,H
F	B,D,G
G	D,F,H
H	D,E,F

## LATIHAN SOAL

3. Terdapat 7 matakuliah (A s/d G) yang pada semester ini di ambil oleh 14 mahasiswa. Berikut ini adalah tabel pengambilan matakuliah oleh mahasiswa. Gunakan algoritma pewarnaan Welsh-Powell untuk penjadwalan kuliah yang efisien.

- Tentukan slot waktu minimal yang harus disiapkan agar para mahasiswa diatas dapat mengikuti perkuliahan.
- Matakuliah mana sajakah yang bisa dijadwalkan dalam slot waktu yang sama.

NIM	A	B	C	D	E	F	G
001	1	-	-	-	-	-	1
002	1	1	-	-	-	-	-
003	1	-	-	-	-	1	-
004	-	1	-	-	-	1	-
005	-	1	1	-	-	-	-
006	-	1	-	1	-	-	-
007	-	-	1	1	-	-	-
008	-	-	1	-	-	-	1
009	-	-	-	1	1	-	-
010	-	-	-	1	-	-	1
011	-	-	-	-	1	1	-
012	-	-	-	-	1	-	1
013	-	-	-	-	-	1	1
014	-	1	-	-	-	1	-

**TERIMA KASIH**