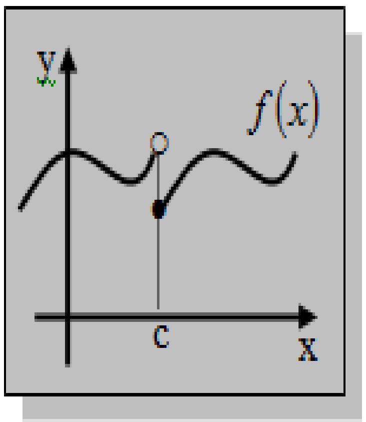
Kontinuitas Suatu Fungsi

Pertemuan 12-13
Pertemuan 14 Responsi

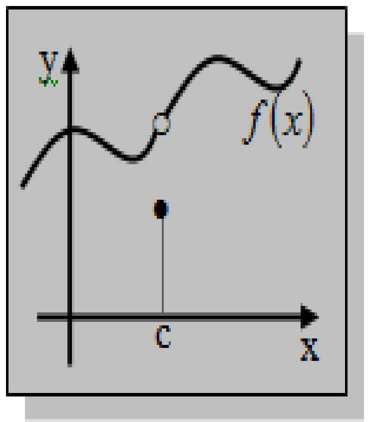
Kontinuitas Suatu Fungsi

Kata kontinu dalam kehidupan biasa digunakan untuk menyatakan suatu proses yang berkelanjutan tanpa perubahan yang mendadak, jika kita hubungkan dengan sebuah fungsi, pandang tiga buah grafik seperti pada Gambar berikut:



Gambar (a)

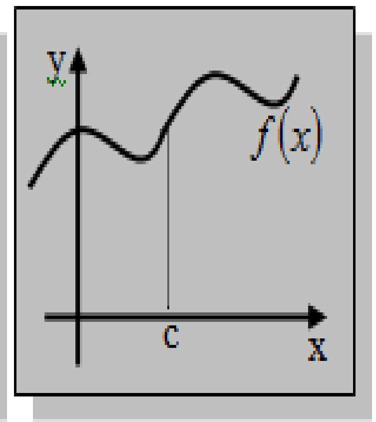
$\lim_{x \to c} f(x) =$ tidak ada



Gambar (b)

$\lim_{x \to c} f(x) =$ ada

$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$



Gambar (c)

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Keterangan :

1. Gambar (a) menunjukan nilai $\lim\limits_{x \to c} f(x) =$ tidak ada dan $f(c)$ juga tidak terdefinisi di $x = c$

   Misalnya : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$, maka dapat diketahui bahwa $f(1) = 2$

   $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} =$ tidak ada, jadi kesimpulannya $f(c)$ ada dan $\lim\limits_{x \to c} f(x) =$ tidak ada

2. Gambar (b) menunjukkan nilai $\lim\limits_{x \to c} f(x) =$ ada dan $f(c)$ juga ada, tetapi $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

   Misalnya : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$, maka dapat diketahui bahwa $f(2) = 2$ dan

   $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4$ jadi $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ sehingga dapat dikatakan bahwa $\lim\limits_{x \to c} f(x) =$ ada dan $f(c)$ juga ada, tetapi $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

3. Gambar (c) menunjukan nilai $\lim\limits_{x \to c} f(x) =$ ada dan $f(c)$ juga ada, serta $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

   Misalnya : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{x-3} & x \neq 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases}$, maka dapat diketahui bahwa $f(3) = 3$ dan

   $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-3x}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}(x) = 3$ jadi $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$ sehingga dapat dikatakan bahwa $\lim\limits_{x \to c} f(x) =$ ada dan $f(c)$ juga ada, serta $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Definisi :

Kita katakana bahwa f kontinu di c jika beberapa selang terbuka di sekitar c terkandung daerah asal f dan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Dari definisi di atas dapat kita katakana bahwa :

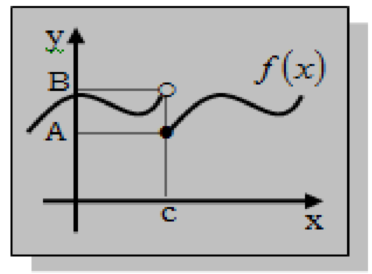
1. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada
2. $f(c)$ ada
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu tidak dipenuhi, maka dikatakan f tidak kontinu atau diskontinu di c

Limit Kiri dan Limit Kanan

Definisi :

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ berarti bahwa jika x dekat dengan c dari kanan, maka $f(x)$ dekat dengan L, demikian juga bahwa $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ berarti bahwa jika x dekat dengan c dari kiri, maka $f(x)$ dekat dengan L.



Gambar 1

Pandang Gambar 1, maka :

- Limit kanan adalah $\lim_{x \to c^+} f(x) = A$
- Limit kiri adalah $\lim_{x \to c^-} f(x) = B$

Hal ini menujukan limit kanan ($\lim_{x \to c^+} f(x) = A$) tidak sama dengan limit kiri ($\lim_{x \to c^-} f(x) = B$), akibatnya limit untuk x mendekati c ($\lim_{x \to c} f(x)$) juga tidak ada

Teorema A

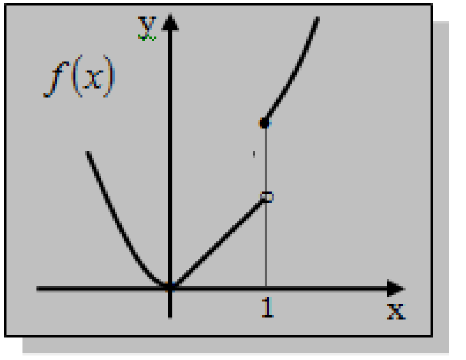
$\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$

Contoh 1

Diketahui fungsi sepotong-potong $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x & 0<x<1 \\ 1+x^2 & x\ge 1 \end{cases}$ sketsakan grafiknya

Penyelesaian

Sketsa grafik fungsi di atas seperti Gambar



Dari hal tersebut dapat ditentukan beberapa hal :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, karena $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$
- $f(0)=0$
- Karena $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, maka $f(x)$ kontinu di $x=0$
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$ tidak ada, karena :
    1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(1+x^2)$
       $=1+1^2$
       $=2$
    2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x)$
       $=1$

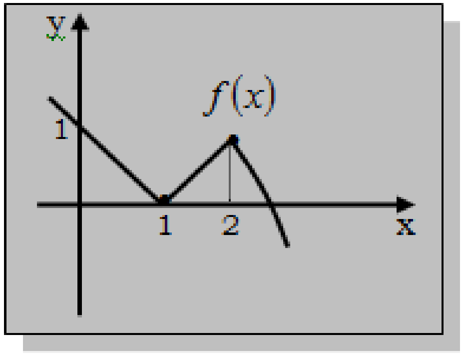
Karena $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, maka $f(x)$ tidak kontinu di $x=1$

Contoh 2

Diketahui fungsi sepotong-potong $f(x)=\begin{cases} 1-x & x<1 \\ x-1 & 1<x<2 \\ 5-x^2 & x\geq 2 \end{cases}$ sketsakan grafiknya

Penyelesaian

Sketsa grafik fungsi di atas seperti Gambar berikut



Dari hal tersebut dapat ditentukan beberapa hal :

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$, karena :
  1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)$
     $= 1-1 = 0$
  2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)$
     $= 1-1 = 0$

  Karena $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, maka $f(x)$ kontinu di $x=1$ dan $f(1)=0$

- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$, karena :
  1. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(5-x^2)$
     $= 5-2^2 = 1$
  2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)$
     $= 2-1 = 1$

  Karena $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, maka $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$ serta $f(x)$ kontinu di $x=2$ dan juga $f(2)=1$

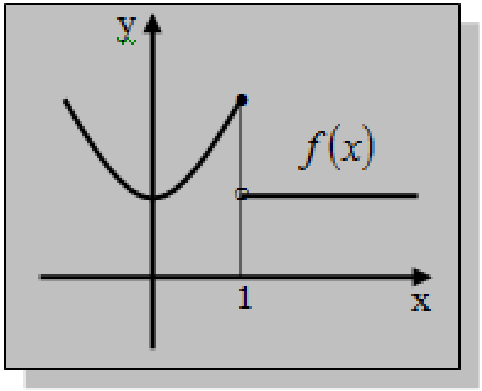
- Karena $f(x)$ kontinu di $x=1$ dan $x=2$, maka $f(x)$ kontinu di mana-mana

Contoh 3:

Diketahui fungsi sepotong-potong $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$ sketsakan grafiknya

Penyelesaian

Sketsa grafik fungsi di atas seperti Gambar berikut



Dari hal tersebut dapat ditentukan beberapa hal :

- $f(1)=2$, karena $f(1)=1^2+1=1+1=2$
- Uji Limit Kiri dan Limit Kanan
  1. Limit Kanan :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(1)$$
$$= 1$$

  2. Limit Kiri :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+1)$$
$$= 1^2+1$$
$$= 2$$

Karena $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$, maka $\lim_{x\to 1} f(x) =$ tidak ada

- Karena $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(x)$ di x dekat 1, maka $f(x)$ diskontinu di $x=1$

Latihan Soal : Tentukan apakah fungsi di bawah kontinu

1. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 2 & x\le -1 \\ -x & -1<x<1 \\ x-2 & x>1 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 1 & 0<x<1 \\ x & x\ge 1 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} -x & x\le 0 \\ x & 0<x<1 \\ 2-x & x>1 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+2 & x<-1 \\ 0 & -1<x<1 \\ x^2-3x+2 & x\ge 1 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 0 \\ 1-x & 0<x<1 \\ x^2-4x+3 & 1\le x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x & 0<x<1 \\ 1+x^2 & x\ge 1 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} -x-2 & x<-1 \\ -x^2 & -1<x<1 \\ x-2 & x\ge 1 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<-1 \\ x^2+1 & -1<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} -x^2-x & x\le 0 \\ -x^2+1 & 0<x<2 \\ -2 & x>2 \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -2 \\ 2x^2+4x & -2<x<1 \\ -2x+8 & x>1 \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<-1 \\ x^2 & -1<x\le 1 \\ 2-x & 1<x<3 \\ -1 & x\ge 3 \end{cases}$

Menentukan Fungsi Menjadi Kontinu

Seperti yang telah kita sebutkan di atas, bahwa suatu fungsi dikatakan kontinu di $x = c$, jika memenuhi ketiga syarat yaitu :

1. $f(c) = L$

2. $\lim_{x \to c} f(x) = L$, jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Sekarang bagaimana jika sebuah fungsi belum diketahui kontinu atau diskontinu yang disebabkan adanya beberapa konstanta yang belum diketahui. Untuk mendapatkan konstanta yang belum diketahui, digunakan limit kiri dan limit kanan yaitu $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$

Contoh 1

Diketahui fungsi sepotong-potong $f(x)=\begin{cases} x+a & x<1 \\ 3-x & x\geq 1 \end{cases}$ tentukan nilai a agar $f(x)$ menjadi kontinu

Penyelesaian

Akan ditentukan agar $f(x)$ kontinu di $x=1$, yaitu dengan menentukan $\underset{x\to c^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to c^-}{Lim} f(x)$

- Limit Kanan $\Rightarrow \underset{x\to c^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to 1^+}{Lim}(x+a)$

  $= 1+a$

  Jadi Limit Kanan adalah : $\underset{x\to c^+}{Lim} f(x) = 1+a$

- Limit Kiri $\Rightarrow \underset{x\to c^-}{Lim} f(x) = \underset{x\to 1^-}{Lim}(3-x)$

  $= 3-1 = 2$

  Jadi Limit Kanan adalah : $\underset{x\to c^-}{Lim} f(x) = 2$

Agar $f(x)$ kontinu di $x=1$, maka $\underset{x\to c^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to c^-}{Lim} f(x)$, diperoleh :

$\underset{x\to c^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to c^-}{Lim} f(x)$

$1+a=2$ maka $a=1$

Jadi agar $f(x)$ kontinu di $x=1$, maka nilai $a=1$, sehingga fungsi diatas akan menjadi fungsi kontinu yaitu : $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<1 \\ 3-x & x\geq 1 \end{cases}$

Contoh 2

Diketahui fungsi sepotong-potong $f(x)=\begin{cases}-3 & x\le -2\\ b-ax & -2<x<1\\ ax-1 & x\ge 1\end{cases}$ tentukan nilai a dan b agar $f(x)$ menjadi kontinu

Penyelesaian

Akan ditentukan agar $f(x)$ kontinu, maka $f(x)$ harus kontinu di $x=-2$ dan di $x=1$.

1). $f(x)$ kontinu di $x=-2$, maka $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

- Limit Kiri

  $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(-3)$

  $= -3$

  Jadi Limit Kiri adalah : $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-3$

- Limit Kanan

  $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(b-ax)$

  $= b-a(-2)$

  $= b+2a$

  Jadi Limit Kanan adalah : $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=b+2a$

Agar $f(x)$ kontinu di $x=-2$, maka $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ sehingga diperoleh :

$b+2a=-3$ ....pers(1)

Lanjutan

2). $f(x)$ kontinu di $x=1$, maka $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

- Limit Kiri

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(b-ax)$$
$$= b - a(1)$$
$$= b - a$$

Jadi Limit Kiri adalah : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = b - a$

- Limit Kanan

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(ax-1)$$
$$= a(1) - 1$$
$$= a - 1$$

Jadi Limit Kanan adalah : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a - 1$

Agar $f(x)$ kontinu di $x=1$, maka $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ sehingga diperoleh :

$a - 1 = b - a$

$2a - b = 1$ ....pers(2)

Lanjutan

Agar $f(x)$ kontinu, maka pers(1) dan pers(2) dilakukan eliminasi atau substitusi untuk memperoleh nilai a dan b , yaitu :

$\Rightarrow b+2a=-3$ ....pers(1)

$\Rightarrow 2a-b=1$ ....pers(2)

$$\begin{array}{r} 4a=-2 \end{array} +$$

$$a=\frac{-1}{2}$$

jika $a=\frac{-1}{2}$ disubstitusikan ke $b+2a=-3$ akan diperoleh $b=-2$, sehingga diperoleh agar $f(x)$ kontinu, maka nilai $a=-\frac{1}{2}$ dan $b=-2$, sehingga fungsinya menjadi :

$$f(x)=\begin{cases} -3 & x\le -2 \\ -2+\frac{1}{2}x & -2\le x\le 1 \\ -\frac{1}{2}x-1 & x\ge 1 \end{cases}$$

Contoh 3

Diketahui fungsi sepotong-potong $f(x)=\begin{cases} ax+6 & x\le -2 \\ -ax^2+bx & -2<x<1 \\ ax-12 & x\ge 1 \end{cases}$ tentukan nilai a dan b agar $f(x)$ menjadi kontinu

Penyelesaian

Akan ditentukan agar $f(x)$ kontinu, maka $f(x)$ harus kontinu di $x=-2$ dan di $x=1$.

1). $f(x)$ kontinu di $x=-2$, maka $\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^-} f(x)$

- Limit Kanan $\Rightarrow \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\left(-ax^2+bx\right)$

$$=-a(-2)^2+b(-2)$$

$$=-4a-2b$$

Jadi Limit Kanan adalah : $\lim_{x\to -2^+} f(x)=-4a-2b$

- Limit Kiri $\Rightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(ax+6)$

$$=a(-2)+6$$

$$=-2a+6$$

Jadi Limit Kiri adalah : $\lim_{x\to -2^-} f(x)=-2a+6$

Agar $f(x)$ kontinu di $x=-2$, maka $\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^-} f(x)$ sehingga diperoleh :

$-4a-2b=-2a+6$ atau $-2a-2b=6$ ....pers(1)

Lanjutan

2). $f(x)$ kontinu di $x=1$, maka $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

- Limit Kanan

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(ax-12)$$
$$= a(1)-12$$
$$= a-12$$

Jadi Limit Kanan adalah : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a-12$

- Limit Kiri

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-ax^2+bx)$$
$$= -a(1)^2 + b(1)$$
$$= -a+b$$

Jadi Limit Kiri adalah : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -a+b$

Agar $f(x)$ kontinu di $x=1$, maka $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ sehingga diperoleh :

$a-12 = -a+b$ atau $2a-b=12$ ....pers(2)

Lanjutan

Agar $f(x)$ kontinu, maka pers(1) dan pers(2) dilakukan eliminasi atau substitusi untuk memperoleh nilai a dan b , yaitu :

$$\Rightarrow -2a-2b=6 \quad \text{.........pers(1)}$$

$$\Rightarrow 2a-b=12 \quad \text{.........pers(2)}$$

$$\underline{} \; +$$

$$-3b=18$$

$$b=-6$$

jika $b=-6$ disubstitusikan ke $-2a-2b=6$ akan diperoleh $a=3$, sehingga diperoleh agar $f(x)$ kontinu, maka nilai $a=3$ dan $b=-6$, sehingga fungsinya menjadi

$$f(x)=\begin{cases} 3x+6 & x\le -2 \\ -3x^2-6x & -2<x<1 \\ 3x-12 & x\ge 1 \end{cases}$$

Latihan Soal

Diketahui fungsi-fungsi berikut, tentukan nilai a dan b agar fungsi $f(x)$ menjadi kontinu, kemudian sketsakan grafiknya

1. $f(x)=\begin{cases} ax+1 & x\le 1 \\ ax^2+bx+5 & 1<x<3 \\ 2 & x\ge 3 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} ax & x\le -1 \\ -x^2+b & -1<x<1 \\ ax-4 & x\ge -1 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x+b & x\le 0 \\ x^2-3x+a & 0<x<2 \\ 2-x & x\ge 2 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} ax+2 & x\le -2 \\ -x^2-b & -2<x<2 \\ ax-2 & x\ge 2 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} ax+2 & x\le -1 \\ ax^2+bx & -1<x<1 \\ -ax+8 & x\ge -1 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 1 & x\le -1 \\ ax^2 & -1<x<1 \\ ax+b & x\ge 1 \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 0 \\ 1 & 0<x<1 \\ ax & x\ge 1 \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} -ax & x\le 0 \\ ax+b & 0<x<4 \\ 2 & x\ge 4 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} ax+6 & x\le -2 \\ -ax^2+bx & -2<x<1 \\ ax-12 & x\ge 1 \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} ax+4 & x\le -2 \\ ax^2+bx & -2<x<1 \\ -ax+8 & x\ge -1 \end{cases}$

- Terima Kasih