Limit Fungsi Aljabar

Pertemuan 9-11

Pendahuluan Limit

Materi tentang limit merupakan materi yang membedakan antara kalkulus dari cabang-cabang matematika yang lain.

Dalam beberapa perkataan yang sering kita ucapkan sehari-hari, misalkan :

- . Saya mendekati batas kesabaran saya
- . Mobil itu melaju mendekati batas kecepatan

Misalnya terdapat fungsi yaitu

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Perhatikan bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisi pada $x = 2$, karena di titik ini $f(x)$ berbentuk $\frac{0}{0}$, dimana $\frac{0}{0}$ itu bentuk yang tidak mempunyai arti, tetapi kita masih bisa menanyakan apa yang terjadi jika x mendekati 2 ? atau apakah $f(x)$ mendekati beberapa bilangan tertentu bilamana x mendekati 2 ?

Ada tiga hal untuk menjawab pertanyaan itu.

1. Menghitung beberapa nilai $f(x)$ untuk x dekat 2

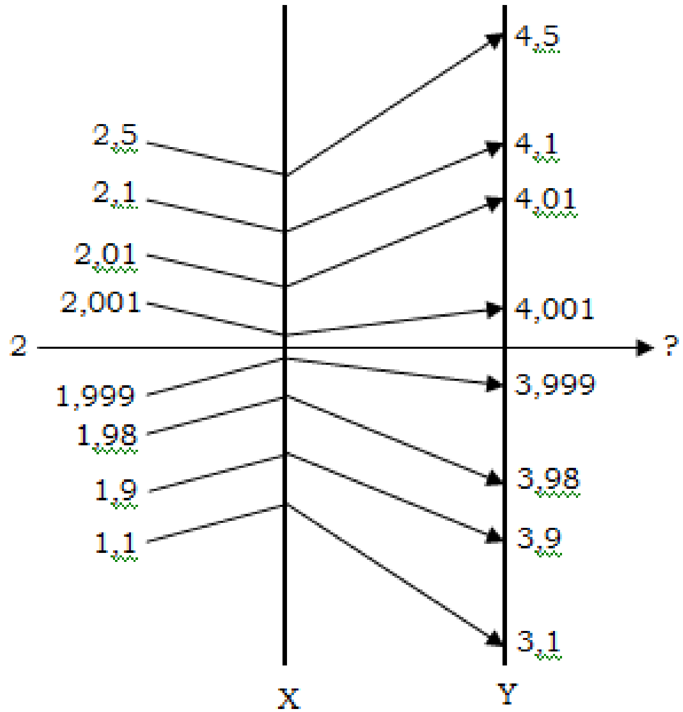
   Misalkan kita mengambil nilai-nilai x dekat 2 yaitu antara lain :

x	$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$
2,5	4,5
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
.	.
.	.
.	.
2.000	?
.	.
.	.
.	.
1,999	3,999
1,98	3,98
1,9	3,9
1,1	3,1

Dari table di atas, terlihat jika nilai-nilai x diambil dari nilai x yang semakin mendekati 2, maka dapat dilihat nilai $f(x)$ kelihatanya menunjuk ke suatu titik yaitu 4

2. Menunjukan nilai-nilai ini dalam sebuah diagram

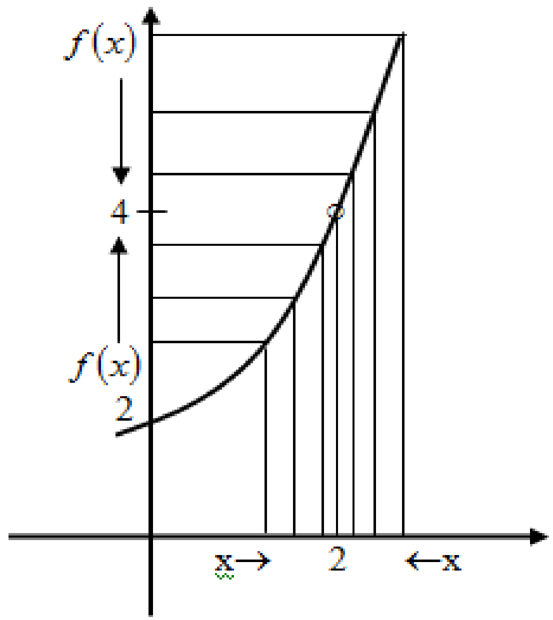
Jika nilai-nilai tersebut di gambar dalam bentuk diagram, misalnya :



Dari diagram dia atas, terlihat untuk nilai x dari atas semakin mendekati nilai 2, maka hasilnya pun semakin menuju ke angka 4, demikian jika nilai x dari bawah mendekati nilai 2, maka terlihat juga hasilnya pun semakin menuju ke angka 4, hal ini dapat dikatakan bahwa jika nilai x mendekati angka 2, maka hasilnya atau nilai $f(x)$ mendekati nilai 4

3. Mensketsakan grafik $y = f(x)$

Jika kita sketsa gafik fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ untuk nilai x mendekati 2 dapat dilihat pada sketsa grafik di bawah ini



Dapat dijelaskan dengan menggunakan sketsa grafik, yaitu jika x mendekati 2 dari sebelah kiri, maka nilai fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ akan mendekati angka 4 dari bawah, sebaliknya jika x mendekati 2 dari sebelah kanan, maka nilai fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ akan mendekati angka 4 dari atas

Bentuk limit dalam lambang bilangan matematika, Hal demikian yang telah digambarkan dalam tiga bentuk adalah menggambarkan sebuah Limit, dalam lambing matematika dituliskan sebagau berikut :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Demikian pengertian dari sebuah limit dapat didefinisikan sebagai berikut

Definisi :

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to a} f(x) = L$ berarti bahwa bila x mendekati a tetapi bukan a, maka $f(x)$ dekat ke L

Menghitung Limit Aljabar

Karena untuk menentukan nilai x yang paling dekat dengan sebuah bilangan a tidak dapat dilakukan, maka kita gunakan saja nilai a untuk menentukan nilai fungsi $f(x)$ asalkan nilai tersebut hanyalah nilai pendekatan.

Dalam menentukan nilai limit, maka ada dua hal, yaitu nilai limit untuk x mendekati sebuah bilangan a dan nilai limit untuk x mendekati bilangan ∞ (tak terhingga)

A. Limit Mendekati a

Jika diketahui sebuah limit yaitu $\lim_{x\to a} f(x) = L$, maka langkah untuk menentukan nilai limit tersebut adalah $x = a$ dimasukan ke $f(x)$ sehingga diperoleh $f(a)$:

- jika $f(a) = L$, dengan L merupakan sebuah bilangan

  Misalkan diketahui sebuah limit yaitu $\lim_{x\to a} f(x) = L$, prinsipnya adalah kita memasukan $x = a$ ke dalam fungsi $f(x)$ yang dilimitkan yaitu $f(a)$, jika menghasilkan sebuah bilangan yaitu $f(a) = L$, maka itulah nilai limitnya atau nilai pendekatanya.

Contoh 1 :

Hitung nilai limit berikut : $\lim_{x \to 3} (2x-1) =$

Penyelesaian

Dari limit di atas, diketahui $f(x) = 2x-1$ dan x mendekati 3, jika $x=3$ dimasukan ke dalam $f(x) = 2x-1$, maka diperoleh $f(3) = 2(3)-1 = 6-1 = 5$, sehingga diperoleh nilai

$$\lim_{x \to 3} (2x-1) = 5$$

Jika $x = a$ dimasukan dalam fungsi $f(x)$ yang dilimitkan yaitu $f(a)$ akan menghasilkan $f(a) = \frac{0}{0}$ maka :

1). $f(x)$ difaktorkan atau

2). $f(x)$ dikalikan dengan akar sekawannya

Contoh 2:

Hitung nilai limit berikut : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$

Penyelesaian

karena $f(2) = \frac{0}{0}$ yaitu hasil yang tidak mempunyai arti, maka $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ harus difaktorkan, yaitu :

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2)$$

= 2 + 2

= 4

Contoh 3

Hitung nilai limit berikut : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$

Penyelesaian

karena $f(1) = \dfrac{0}{0}$ yaitu hasil yang tidak mempunyai arti, maka $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ harus difaktorkan, yaitu :

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (\sqrt{x}+1)$$

Setelah difaktorkan, maka $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ berubah menjadi $f(x) = \sqrt{x}+1$, sehingga jika $x = 1$ dimasukan ke dalam $f(x) = \sqrt{x}+1$ akan diperoleh $f(1) = \sqrt{1}+1 = 2$, sehingga diperoleh $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$

Contoh 4 :

Hitung nilai limit berikut : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-3x}}{x} =$

Penyelesaian

karena $f(0) = \dfrac{0}{0}$ yaitu hasil yang tidak mempunyai arti, maka dikalikan dengan akar sekawan dari pembilangnya, yaitu $\dfrac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2-3x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2-3x}}$, sehingga limitnya menjadi seperti berikut :

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-3x}}{x} = \quad = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-3x}}{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2-3x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2-3x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{(x+2) - (2-3x)}{x\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-3x}\right)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x+2-2+3x}{x\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-3x}\right)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{4x}{x\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-3x}\right)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{4}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-3x}\right)} \right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{0+2} + \sqrt{2-0}} = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Contoh 5

Hitung nilai limit berikut : $\lim_{x\to 5}\left(\frac{25-x^2}{4-\sqrt{2x+6}}\right) =$

Penyelesaian

karena $f(5)=\frac{0}{0}$ yaitu hasil yang tidak mempunyai arti, maka dikalikan dengan akar sekawan dari penyebutnya, yaitu $\frac{4+\sqrt{2x+6}}{4+\sqrt{2x+6}}$, sehingga limitnya menjadi seperti berikut :

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5}\left(\frac{25-x^2}{4-\sqrt{2x+6}}\right) = \lim_{x\to 5}\left(\frac{25-x^2}{4-\sqrt{2x+6}}\right)\left(\frac{4+\sqrt{2x+6}}{4+\sqrt{2x+6}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 5}\left(\frac{25-x^2}{4-\sqrt{2x+6}}\right)\left(\frac{4+\sqrt{2x+6}}{4+\sqrt{2x+6}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 5}\left(\frac{(25-x^2)(4+\sqrt{2x+6})}{4^2-(2x+6)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 5}\left(\frac{(5-x)(5+x)(4+\sqrt{2x+6})}{16-2x-6}\right)$$

$$= \lim_{x\to 5}\left(\frac{(5-x)(5+x)(4+\sqrt{2x+6})}{10-2x}\right)$$

Lanjutan

$$= \lim_{x \to 5} \left(\frac{(5-x)(5+x)\left(4+\sqrt{2x+6}\right)}{2(5-x)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 5} \left(\frac{(5+x)\left(4+\sqrt{2x+6}\right)}{2} \right)$$

$$= \frac{(5+x)\left(4+\sqrt{2x+6}\right)}{2}$$

$$= \frac{(5+5)\left(4+\sqrt{2(5)+6}\right)}{2} = \frac{(10)\left(4+\sqrt{10+6}\right)}{2} = 40$$

Latihan Soal

1. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=$

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2+x}{x}\right)=$

3. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)=$

4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^3-16x}{x^2+4x}\right)=$

5. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^3-8}{x-2}\right)=$

6. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x-3}{x-1}\right)=$

7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}}\right)=$

10. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}\right)=$

11. $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}\right)=$

12. $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{5x-x^2}{x^2-2x-4}\right)=$

13. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+3}}{x}\right)=$

14. $\lim\limits_{x\to9}\left(\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}\right)=$

15. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}\right)=$

16. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{4x^3+6x^2-6x-4}{x-1}\right)=$

B. Limit Mendekati Tak Hingga

Jika diketahui sebuah limit yaitu $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, maka langkah untuk menentukan nilai limit tersebut adalah sebagai berikut :

- jika $f(x)$ berbentuk fungsi rasional $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$

  Jika fungsi $f(x)$ berbentu fungsi rasional $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ dimana $g(x) \neq c$ dengan c suatu bilangan, maka tentukan pangkat tertinggi dari $h(x)$ dan $g(x)$, misalkan pangkat tertinggi dari fungsi $h(x)$ adalah m, sedangkan pangkat tertinggi dari fungsi $g(x)$ adalah n, jika $m > n$, maka setiap suku yang ada di dalam $h(x)$ dan $g(x)$ harus dibagi dengan x^m, sebaliknya jika $m < n$, maka setiap suku yang ada di dalam $h(x)$ dan $g(x)$ harus dibagi dengan x^n dan jika $m = n$, maka setiap suku yang ada di dalam $h(x)$ dan $g(x)$ harus dibagi dengan x^n

Contoh 1

Hitung nilai limit berikut : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x}{4x^2-x+1}\right)=$

Penyelesaian

artinya $h(x)=2x^2-3x$ dengan pangkat tertingginya adalah 2 sedangkan $g(x)=4x^2-x+1$ dengan pangkat tertingginya adalah 2, maka setiap suku yang ada di dalam $h(x)$ dan $g(x)$ harus dibagi dengan x^2, sehingga diperoleh :

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x}{4x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{3}{x}}{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{2-\frac{3}{\infty}}{4-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{2-0}{4-0+0}\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

Contoh 2

Hitung nilai limit berikut : $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-2x+2} =$

Penyelesaian

artinya $h(x) = 2x+1$ dengan pangkat tertingginya adalah 1 sedangkan $g(x) = x^2-2x+2$ dengan pangkat tertingginya adalah 2, karena pangkat tertinggi $h(x)$ lebih kecil dari pangkat tertinggi $g(x)$, maka setiap suku dalam $h(x)$ dan $g(x)$ harus dibagi dengan x^2, sehingga diperoleh :

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-2x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{1-\frac{2}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}}$$

$$= \frac{0+0}{1-0+0} = 0$$

- jika $f(x)$ bukan fungsi rasional

Misalkan $f(x)$ bukan fungsi rasional atau fungsi yang tidak mempunyai penyebut atau fungsi yang penyebutnya 1, maka langkahnya adalah :

1. $f(x)$ diubah menjadi menjadi fungsi rasional $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ dengan cara dikalikan dengan $\dfrac{k(x)}{k(x)}$ dimana $k(x)$ adalah akar sekawan dari $f(x)$
2. $f(x)$ yang sudah berbentuk fungsi rasional atau yang sudah dikalikan dengan akar sekawan yaitu $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ masing-masing suku dalam $g(x)$ dan $h(x)$ dibagi x^m dimana m pangkat tertinggi

Contoh 3

Hitung nilai limit berikut : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}\right)=$

Penyelesaian

Dari limit di atas diketahui $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}$ artinya $f(x)$ bukan fungsi rasional, oleh karena itu $f(x)$ diubah menjadi fungsi rasional dengan cara dikalikan dengan akar sekawan, yaitu :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}\right)\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)-(x+4)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x-4}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}\right)}$$

Setelah dikalikan akar sekawan, maka $f(x)$ berubah menjadi fungsi rasional yaitu : $f(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}}$ dimana $h(x)=-2$ dengan pangkat x^0, dan $g(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}$ dengan pangkat tertingginya $x^{1/2}$ sehingga masing-masing suku dalam $h(x)=-2$ dan $g(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}$ dibagi $x^{1/2}$ dan diperoleh :

Lanjutan

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^{1/2}}}{\left(\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^{1/2}}}{\left(\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^{1/2}}}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-2}{\infty^{1/2}}}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{1+\frac{4}{\infty}}\right)}$$

$$= \frac{0}{\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}\right)}$$

$$= \frac{0}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)} = 0$$

Contoh 4

Hitung nilai limit berikut : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2}-\sqrt{2x^2-3}\right)=$

Penyelesaian

Dari limit di atas diketahui $f(x)=\sqrt{2x^2}-\sqrt{2x^2-3}$ artinya $f(x)$ bukan fungsi rasional, oleh karena itu $f(x)$ diubah menjadi fungsi rasional dengan cara dikalikan dengan akar sekawan, yaitu :

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2}-\sqrt{2x^2-3}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2}-\sqrt{2x^2-3}\right)\frac{\left(\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2-3}\right)}{\left(\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2-3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x^2\right)-\left(2x^2-3\right)}{\left(\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2-3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2-3}\right)}$$

Setelah dikalikan akar sekawan, maka $f(x)$ berubah menjadi fungsi rasional yaitu :

$f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2-3}}$ dimana $h(x)=3$ dengan pangkat x^0, dan $g(x)=\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2-3}$ dengan pangkat tertingginya x^1 sehingga masing-masing suku dalam $h(x)=3$ dan $g(x)=\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2-3}$ dibagi x^1 dan diperoleh :

Lanjutan

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\left(\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2-3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\left(\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}}+\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\frac{3}{x}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{\infty}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-\frac{3}{\infty}}\right)}$$

$$= \frac{0}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2-0}\right)}$$

$$= \frac{0}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= 0$$

Tentukan limit di bawah ini :

1. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3}{x^2+1}\right)=$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)=$

4. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-\sqrt{x^2+2}}{2x}\right)=$

5. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-\sqrt{4x^2-1}}{3x}\right)=$

6. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2+1}\right)=$

7. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+9}+x}{x}\right)=$

8. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-x^2}{x^2-2x-4}\right)=$

9. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{4x^2}-3}{2x-3}\right)=$

10. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{4x^2}-3}{2x-3}\right)=$

- Terima Kasih