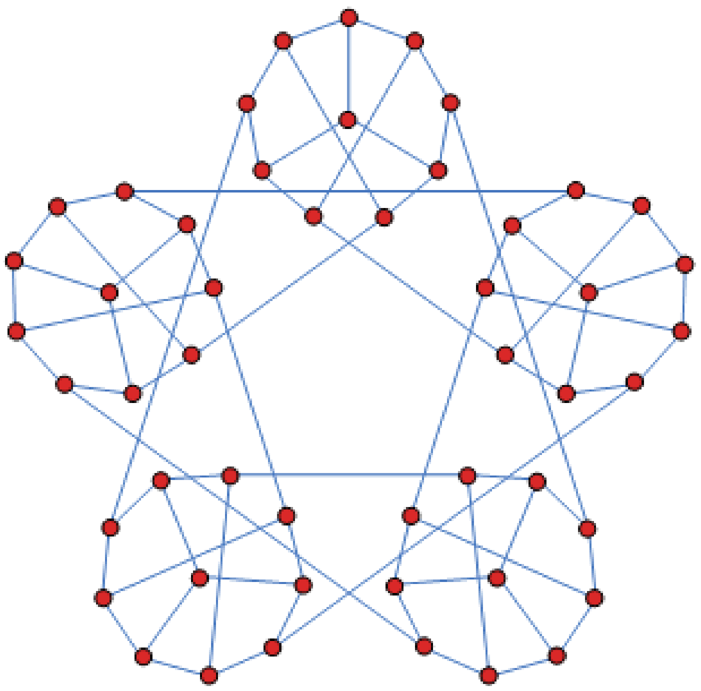
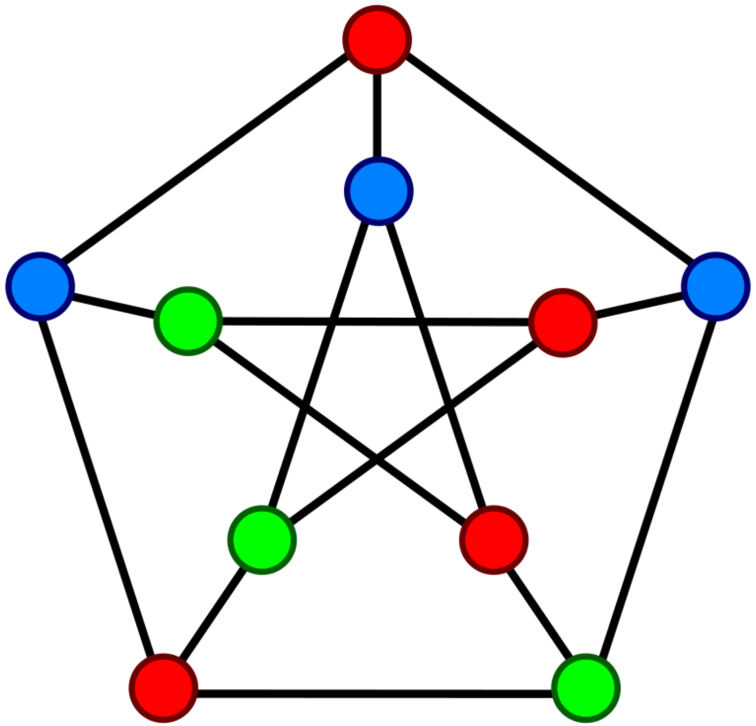


Graf

(Bag. 2)



Bahan Kuliah

IF1220 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

(Update 2024)

Representasi Graf

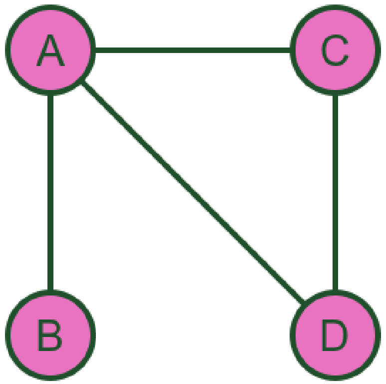
Tiga cara merepresentasikan graf:

1. Matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*)
2. Matriks bersisisan (*incidency matrix*)
3. Senarai ketetanggaan (*adjacency list*)

1. Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*)

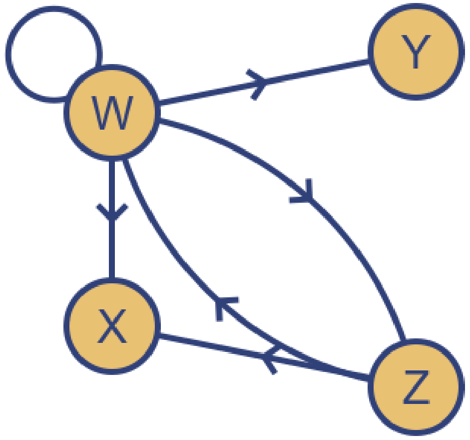
$$A = [a_{ij}],$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, \text{ jika simpul } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$



Simple graph

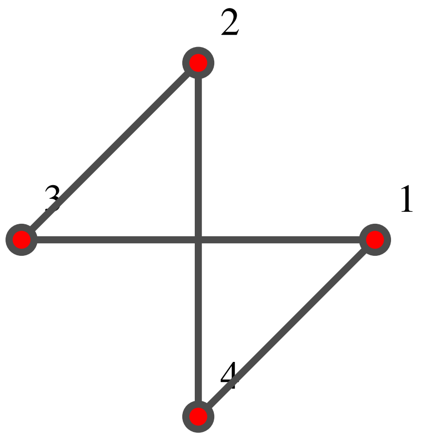
	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	0	0
C	1	0	0	1
D	1	0	1	0

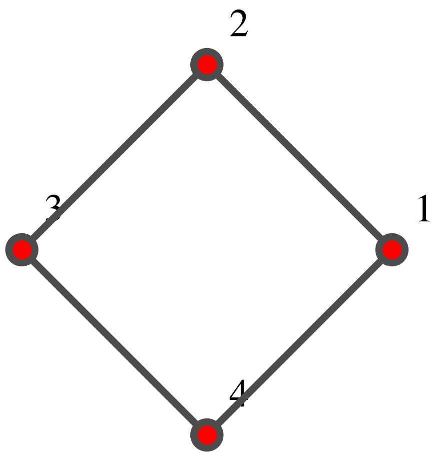


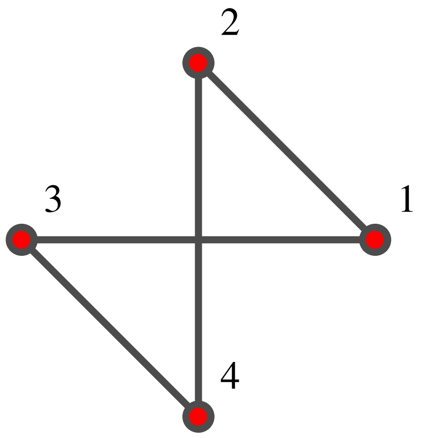
Directed graph with loop

	W	X	Y	Z
W	1	1	1	1
X	0	0	0	0
Y	0	0	0	0
Z	1	1	0	0

https://graphicmaths.com/computer-science/graph-theory/adjacency-matrices/

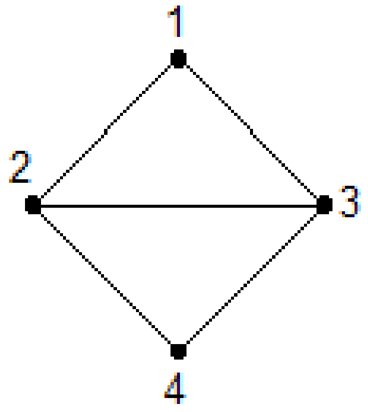






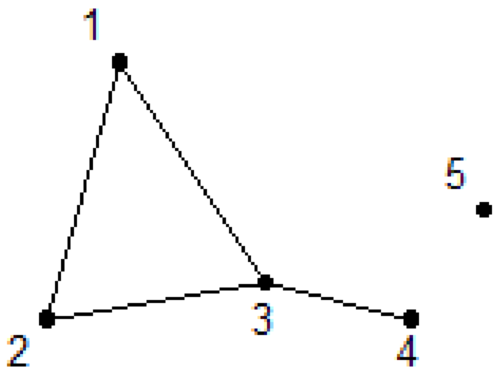
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumber: Wolfram Alpha



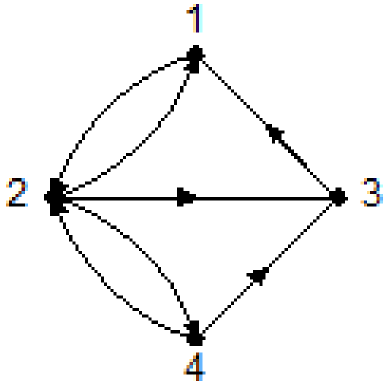
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(a)



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

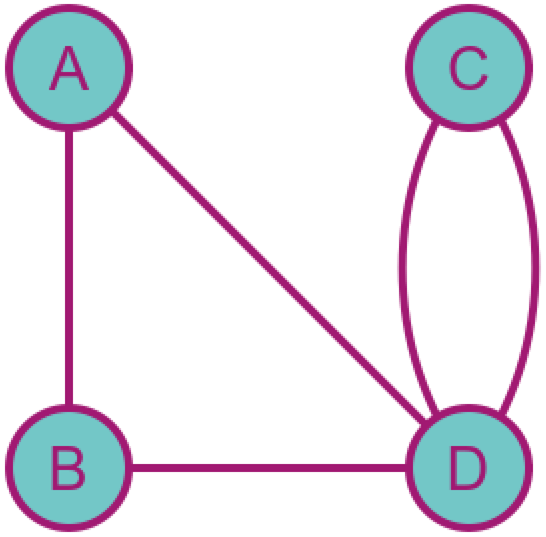
(b)



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(c)

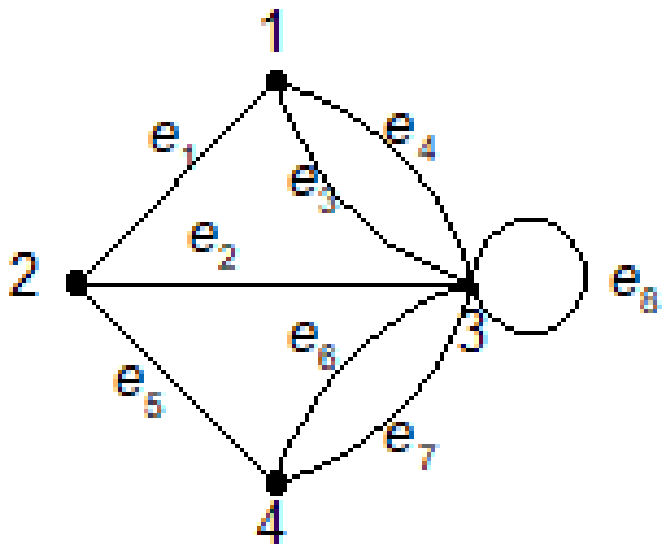
Pada graf dengan sisi ganda, elemen matriks diisi dengan jumlah sisi ganda:



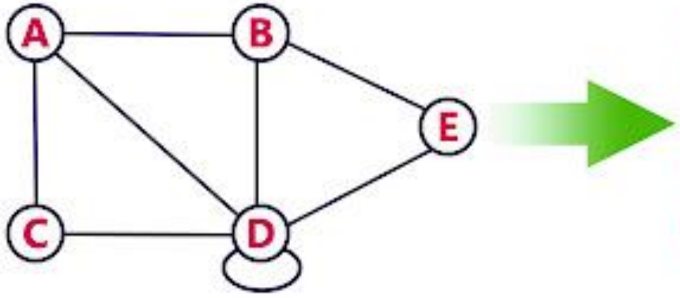
Multigraph

	A	B	C	D
A	0	1	0	1
B	1	0	0	1
C	0	0	0	2
D	1	1	2	0

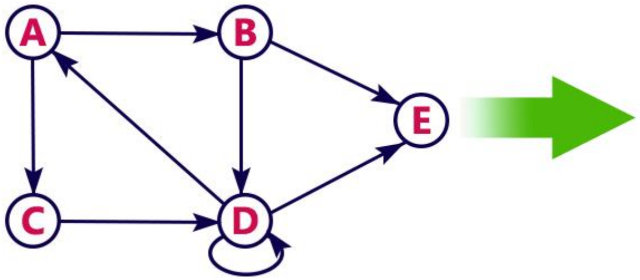
https://graphicmaths.com/computer-science/graph-theory/adjacency-matrices/



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



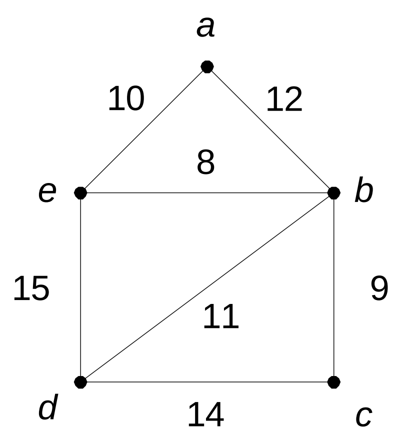
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



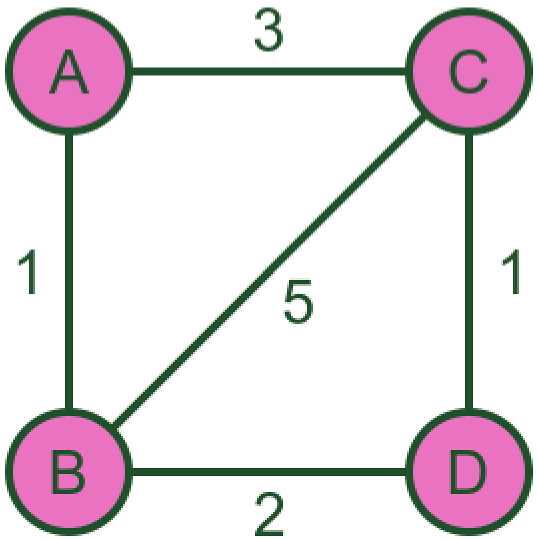
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

http://www.btechsmartclass.com/data_structures/graph-representations.html

- Pada graf berbobot, nilai setiap A(i,j) adalah bobot sisi (i, j)
- Bobot sisi (i,j) tidak didefinisikan, diisi dengan 0 atau ∞



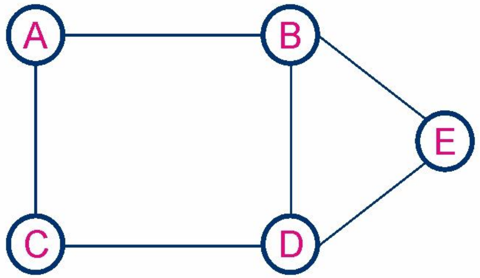
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 12 & \infty & \infty & 10 \\ 12 & \infty & 9 & 11 & 8 \\ \infty & 9 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & 11 & 14 & \infty & 15 \\ 10 & 8 & \infty & 15 & \infty \end{bmatrix}
\end{array}
$$



Weighted graph

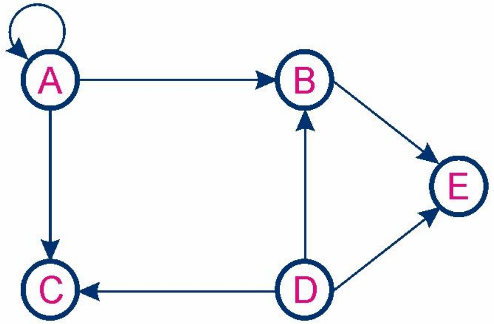
	A	B	C	D
A	0	1	3	0
B	1	0	5	2
C	3	5	0	1
D	0	2	1	0

https://graphicmaths.com/computer-science/graph-theory/adjacency-matrices/



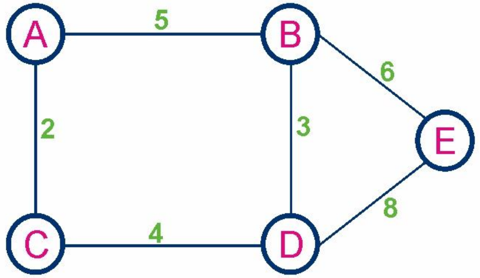
Undirected Graph

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	0	1	1
C	1	0	0	1	0
D	0	1	1	0	1
E	0	1	0	1	0



Directed Graph

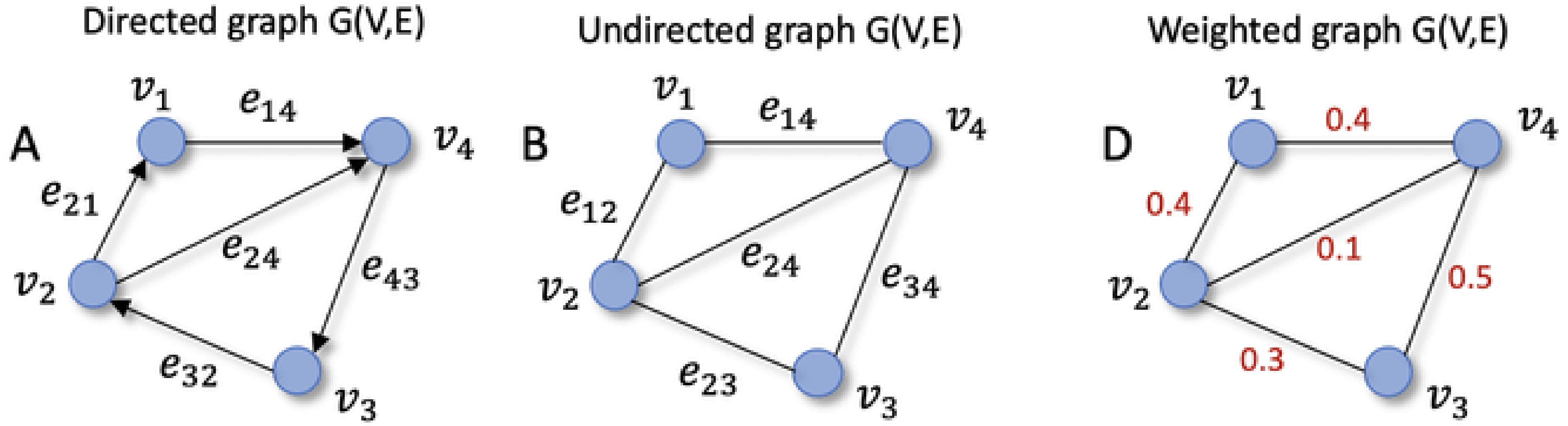
	A	B	C	D	E
A	1	1	1	0	0
B	0	0	0	0	1
C	0	0	0	0	0
D	0	1	1	0	1
E	0	0	0	0	0



Weighted Graph

	A	B	C	D	E
A	0	5	2	0	0
B	5	0	0	3	6
C	2	0	0	4	0
D	0	3	4	0	8
E	0	6	0	8	0

https://studyglance.in/ds/display.php?tno=33&topic=Graph-Representation



E

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	0	0	1
v_2	1	0	0	1
v_3	0	1	0	0
v_4	0	0	1	0

F

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	0	1
v_2	1	0	1	1
v_3	0	1	0	1
v_4	1	1	1	0

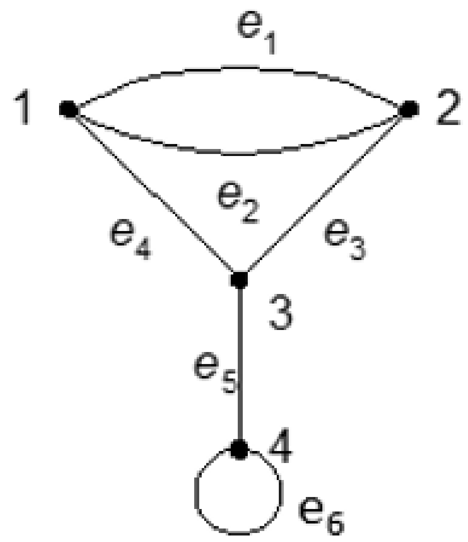
H

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	0.4	0	0.4
v_2	0.4	0	0.3	0.1
v_3	0	0.3	0	0.5
v_4	0.4	0.1	0.5	0

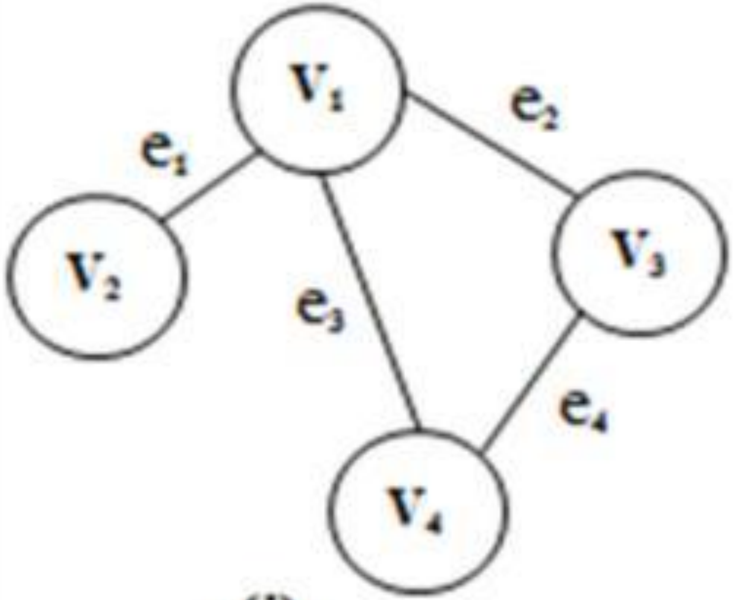
2. Matriks Bersisian (*incidency matrix*)

$A = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



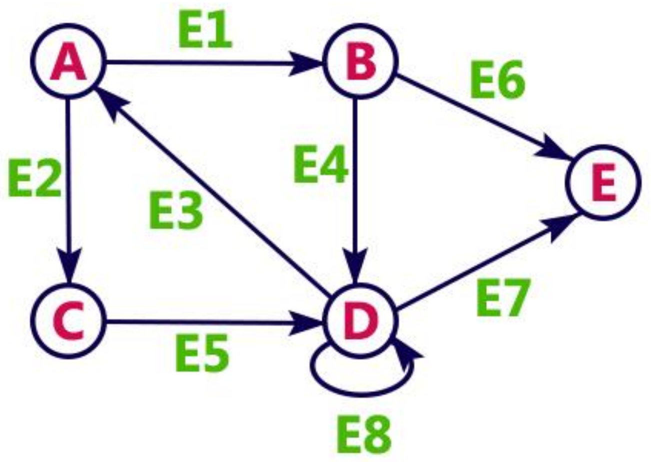
(i)

	e_1	e_2	e_3	e_4
V_1	1	1	1	0
V_2	1	0	0	0
V_3	0	1	0	1
V_4	0	0	1	1

(ii)

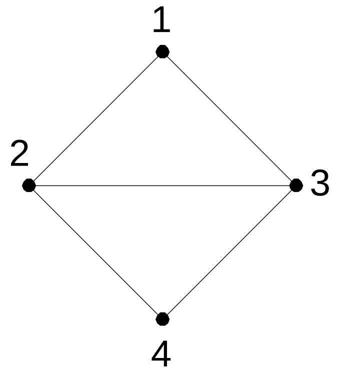
Untuk graf berarah, matriks bersisian diisi dengan nilai 0, 1, dan -1

- 0 jika simpul v tidak bersisian dengan sisi e
- 1 jika simpul v bersisian dengan sisi e bila arah sisi dari simpul v
- -1 jika simpul v bersisian dengan sisi e bila arah sisi menuju simpul v



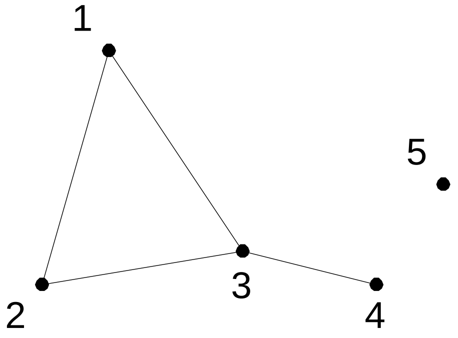
$$
\begin{array}{c}
\\ A \\ B \\ C \\ D \\ E
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} E1 & E2 & E3 & E4 & E5 & E6 & E7 & E8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

3. Senarai Ketetanggaan (*adjacency list*)



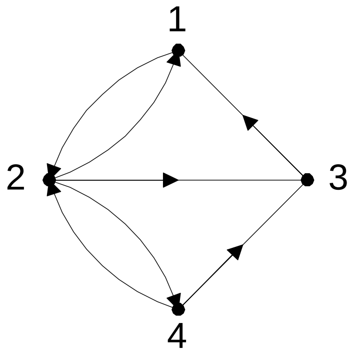
Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4
4	2, 3

(a)



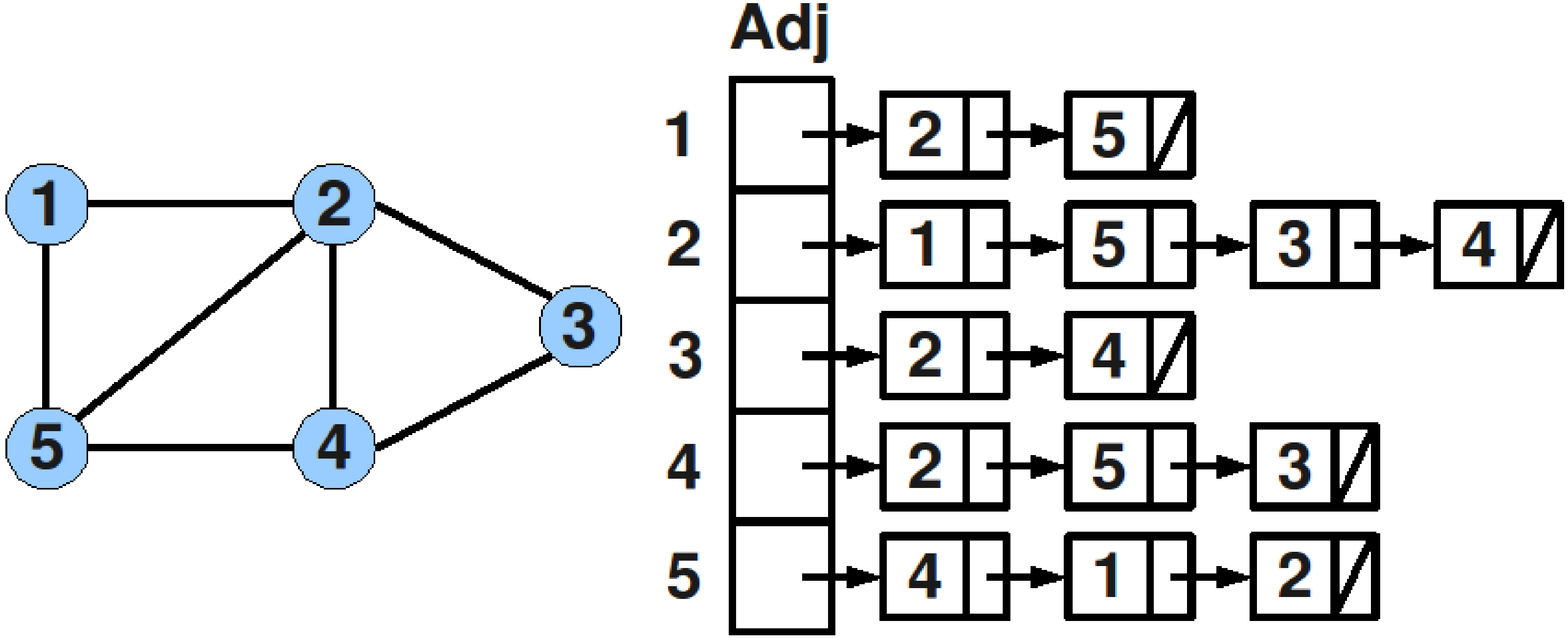
Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	3
5	-

(b)



Simpul	Simpul Terminal
1	2
2	1, 3, 4
3	1
4	2, 3

(c)

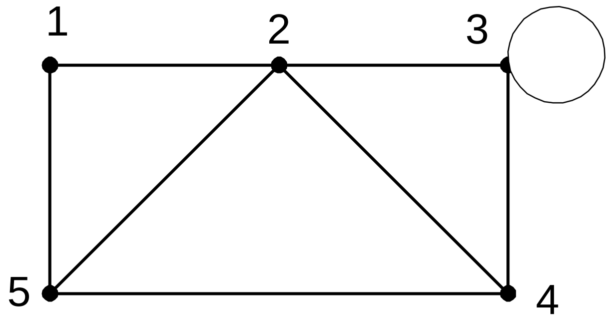

Adj
1 2 5
2 1 5 3 4
3 2 4
4 2 5 3
5 4 1 2

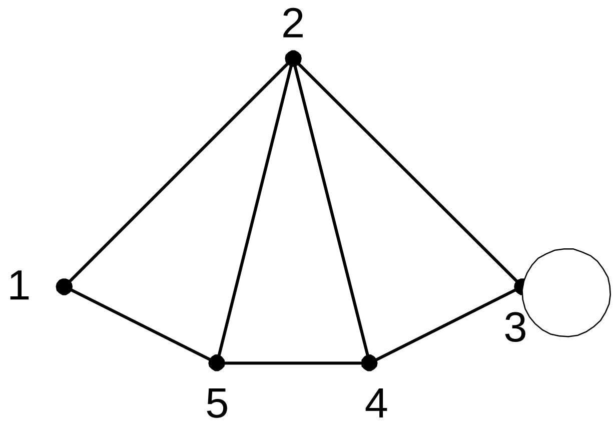
Graf Isomorfik

- Diketahui matriks ketetanggaan (*adjacency matrices*) dari sebuah graf tidak berarah. Gambarkan dua buah graf yang yang bersesuaian dengan matriks tersebut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Jawaban:





- Dua buah graf yang sama (hanya penggambaran secara geometri berbeda)

  → **isomorfik**!

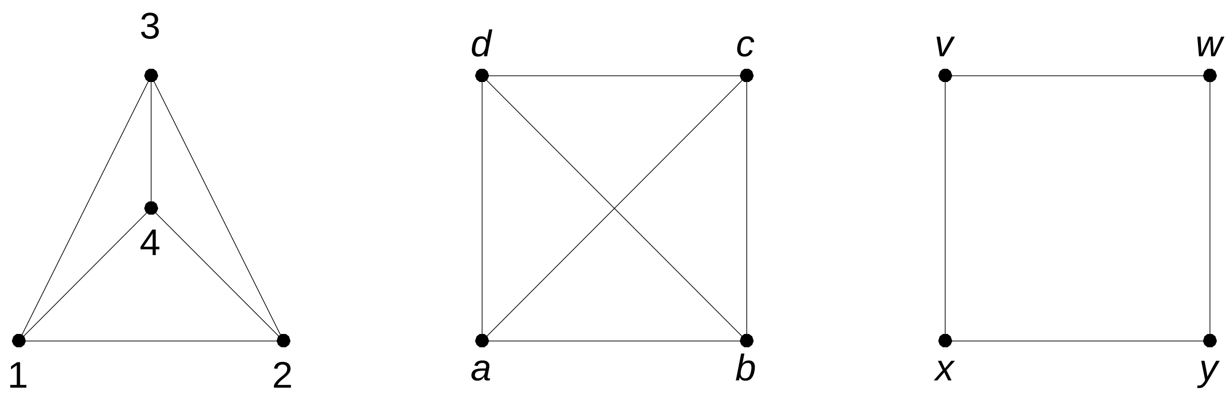
Graf Isomorfik

- Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling **isomorfik**.

- Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduaya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga.

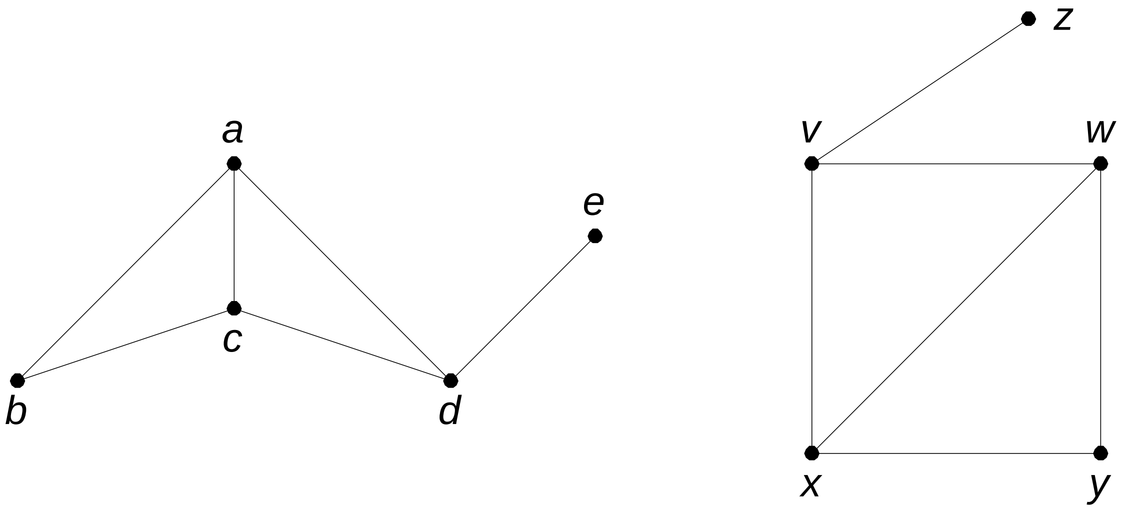
- Dengan kata lain, misalkan sisi e bersisian dengan simpul u dan v di G_1, maka sisi e' yang berkoresponden di G_2 harus bersisian dengan simpul u' dan v' yang di G_2.

- Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Ini benar karena sebuah graf dapat digambarkan dalam banyak cara.



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3

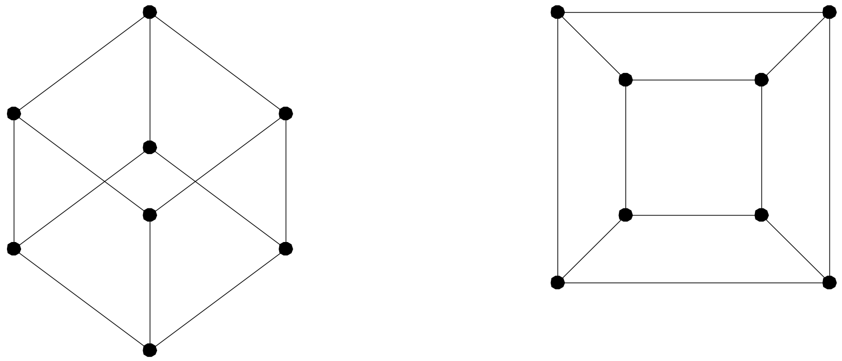
Gambar G_1 isomorfik dengan G_2, tetapi G_1 tidak isomorfik dengan G_3



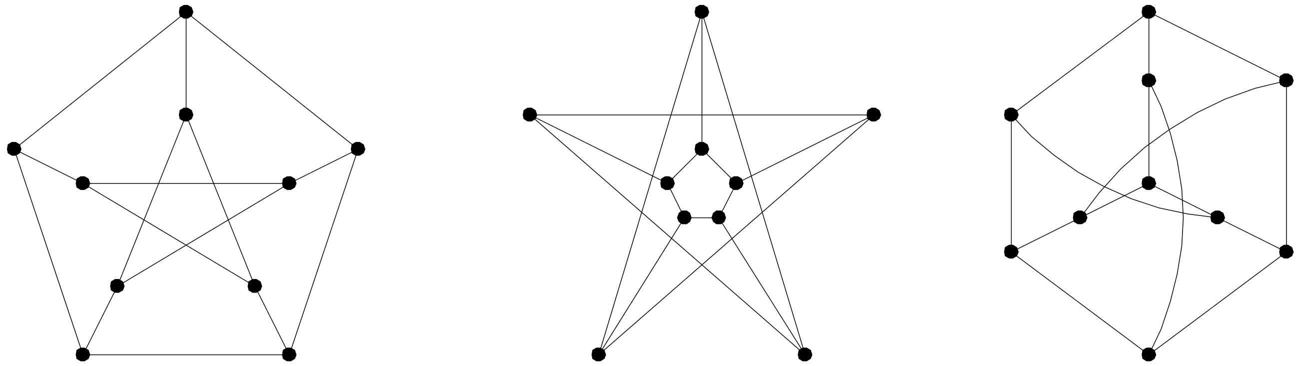
(a) G_1 (b) G_2

Gambar Graf (a) dan graf (b) isomorfik [DEO74]

$$
A_{G1} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
A_{G2} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ w \\ v \\ z \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & w & v & z \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$



(a)



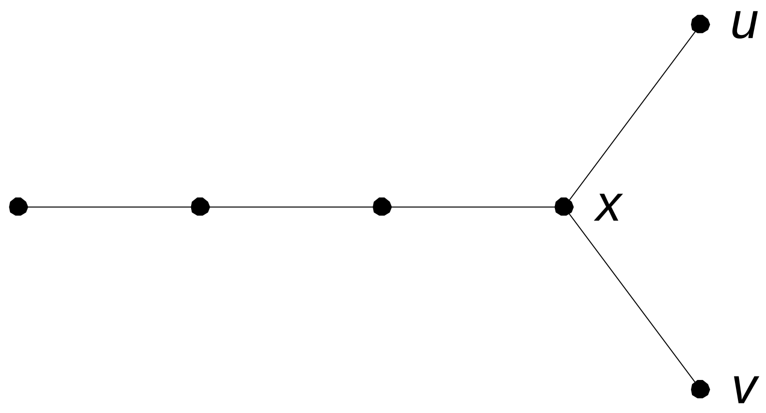
(b)

Gambar (a) Dua buah graf isomorfik, (b) tiga buah graf isomorfik

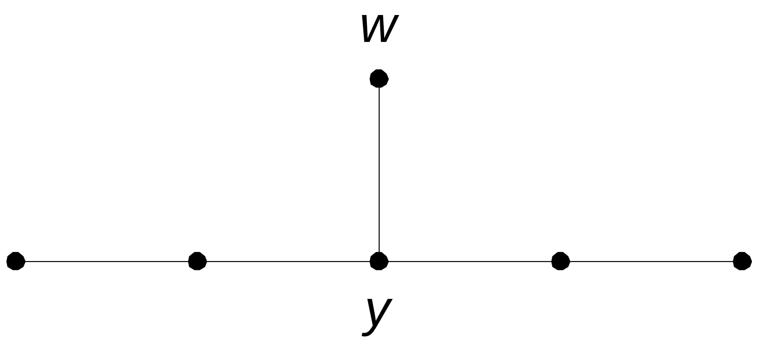
Dari definisi graf isomorfik dapat dikemukakan bahwa dua buah graf isomorfik memenuhi ketiga syarat berikut [DEO74]:

1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
2. Mempunyai jumlah sisi yang sama
3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

Namun, ketiga syarat ini ternyata belum cukup menjamin. Pemeriksaan secara visual perlu dilakukan, seperti contoh dua buah graf di bawah ini:



Simpul x bertetangga dengan u dan v yang masing-masing berderajat 1

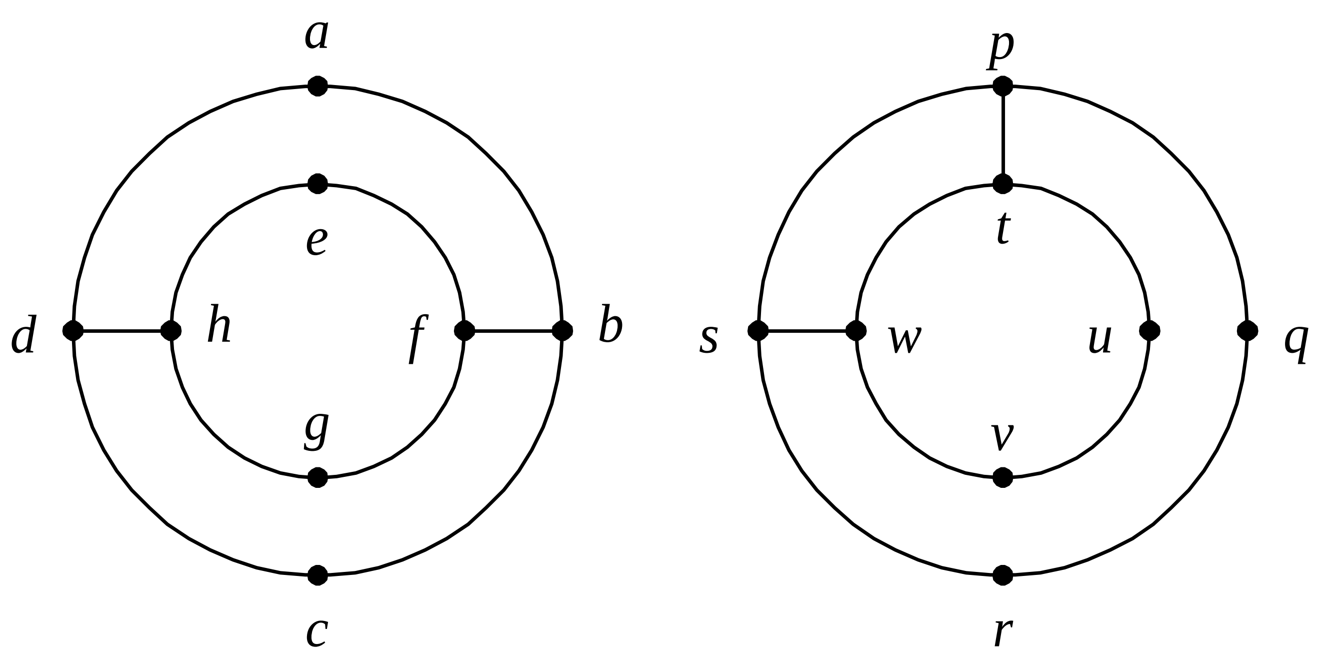


Simpul y bertetangga dengan hanya satu simpul berderajat 1

Kesimpulan: kedua graf tidak isomorfik

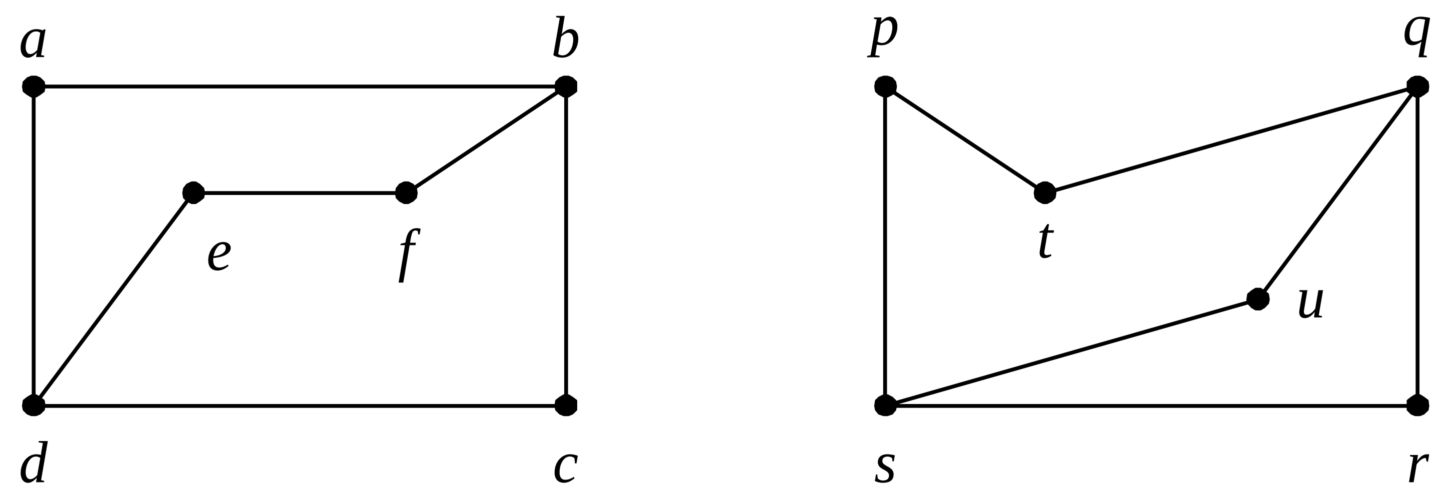
Latihan

- Apakah pasangan graf di bawah ini isomorfik?



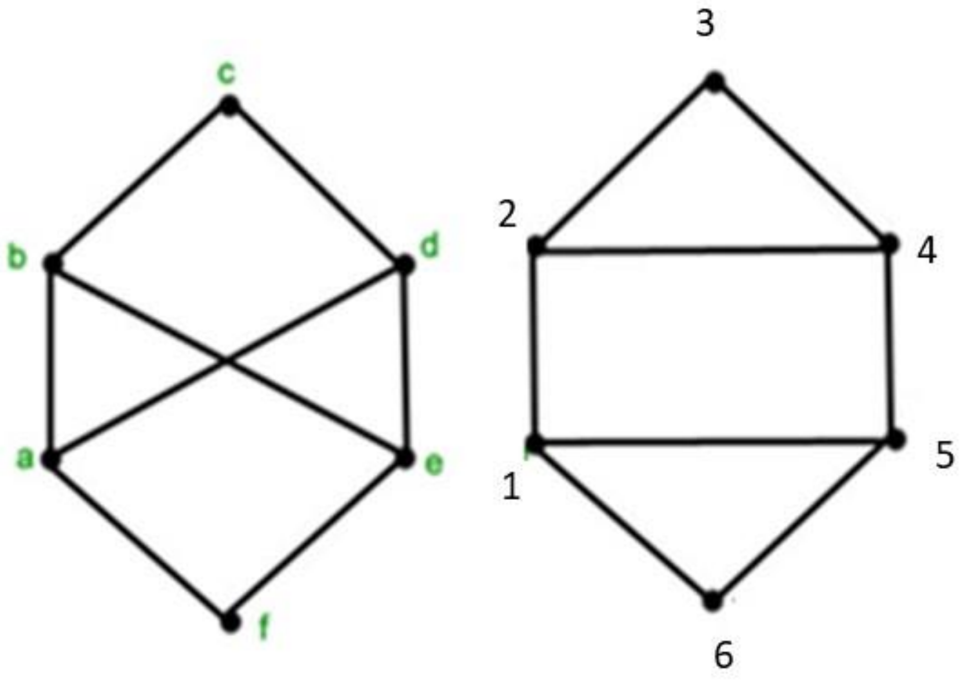
Latihan

- Apakah pasangan graf di bawah ini isomorfik?



Latihan (Kuis 2020)

- Apakah pasangan graf di bawah ini isomorfik?

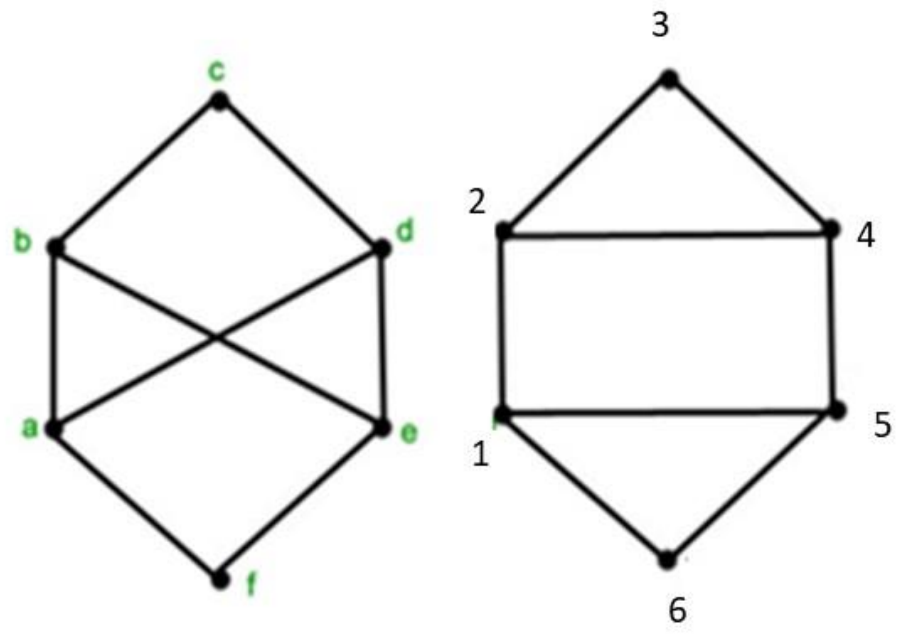


Jawaban:

Graf ini tidak isomorfik karena setiap simpul pada graf kiri tidak berkorespondensi satu-satu dengan simpul pada graf kanan.

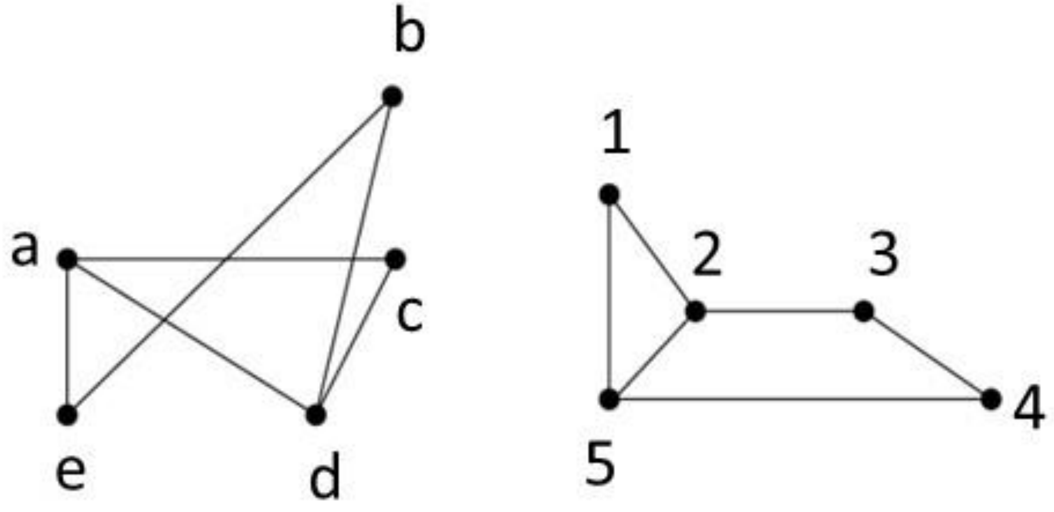
Dapat dilihat pada graf kiri, upagraf yang dapat membentuk sirkuit terbentuk dari minimal 4 simpul. Sedangkan pada graf kanan, upagraf yang dapat membentuk sirkuit terbentuk dari minimal 3 simpul.

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa kedua graf ini tidak isomorfik.



Latihan (Kuis 2022)

Perhatikan gambar dua buah graf di samping kanan ini. Tentukanlah apakah mereka kedua graf tersebuk isomorfik atau tidak. (Apabila iya, tentukan pula simpul-simpul yang berkorespondensi)

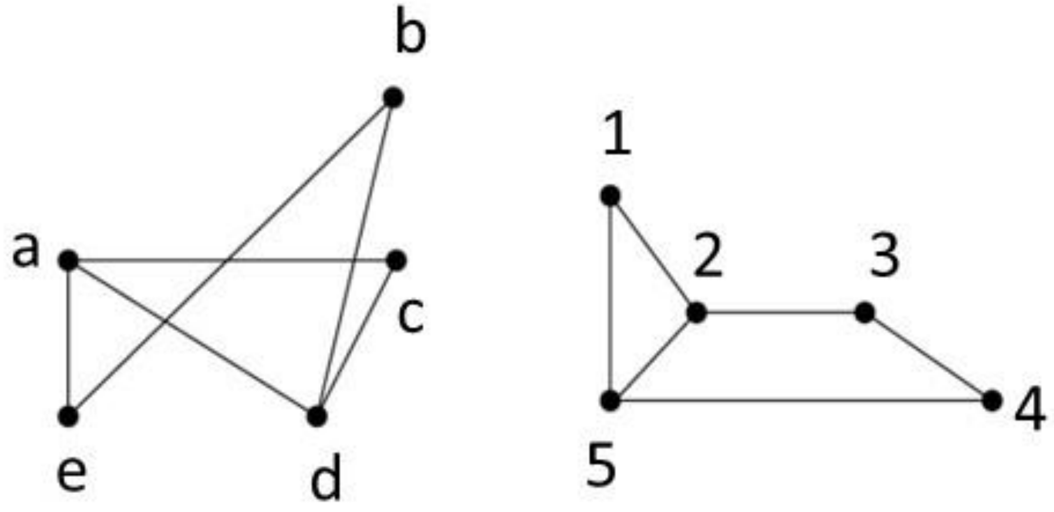


(jawaban pada halaman sesudah ini)

Jawaban:

Kedua graf tersebut bersifat isomorfik. Korespondensi simpul-simpul:

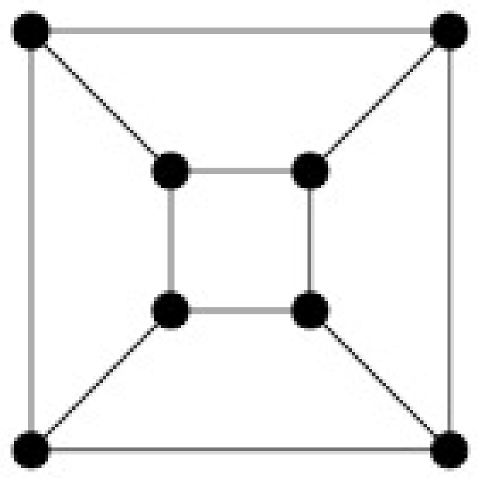
a – 5
b – 3
c – 1
d - 2
e – 4



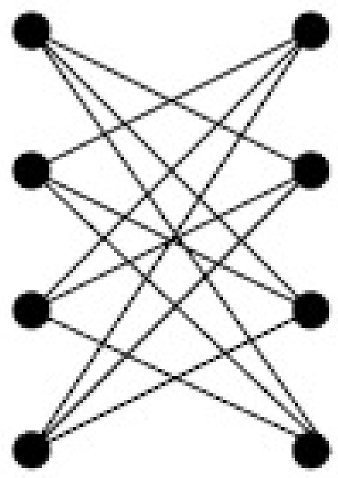
Latihan

- Gambarkan 2 buah graf yang isomorfik dengan graf teratur berderajat 3 yang mempunyai 8 buah simpul

• Jawaban: (contoh dua kemungkinan gambar grafnya)



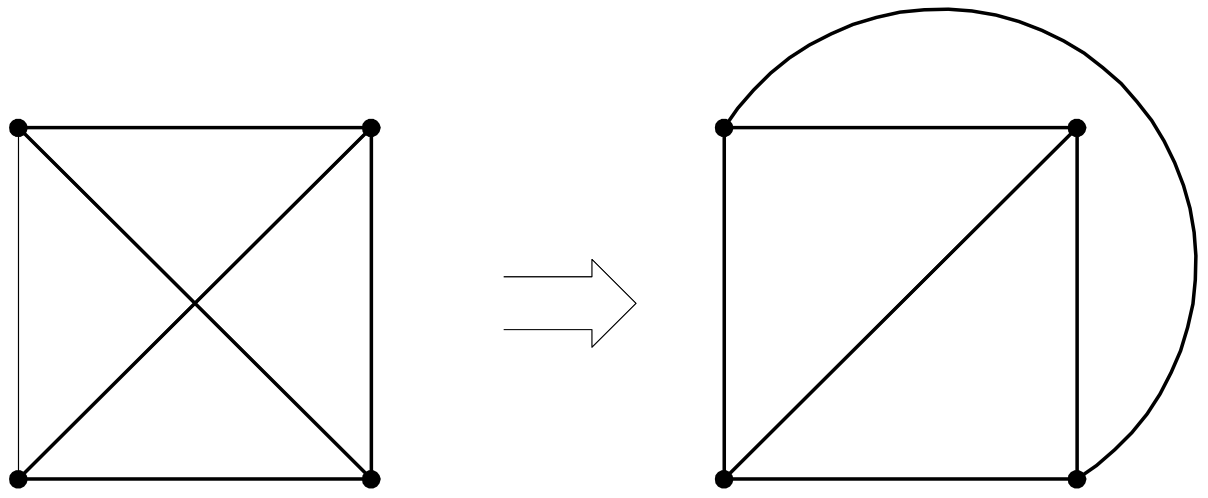
G_1



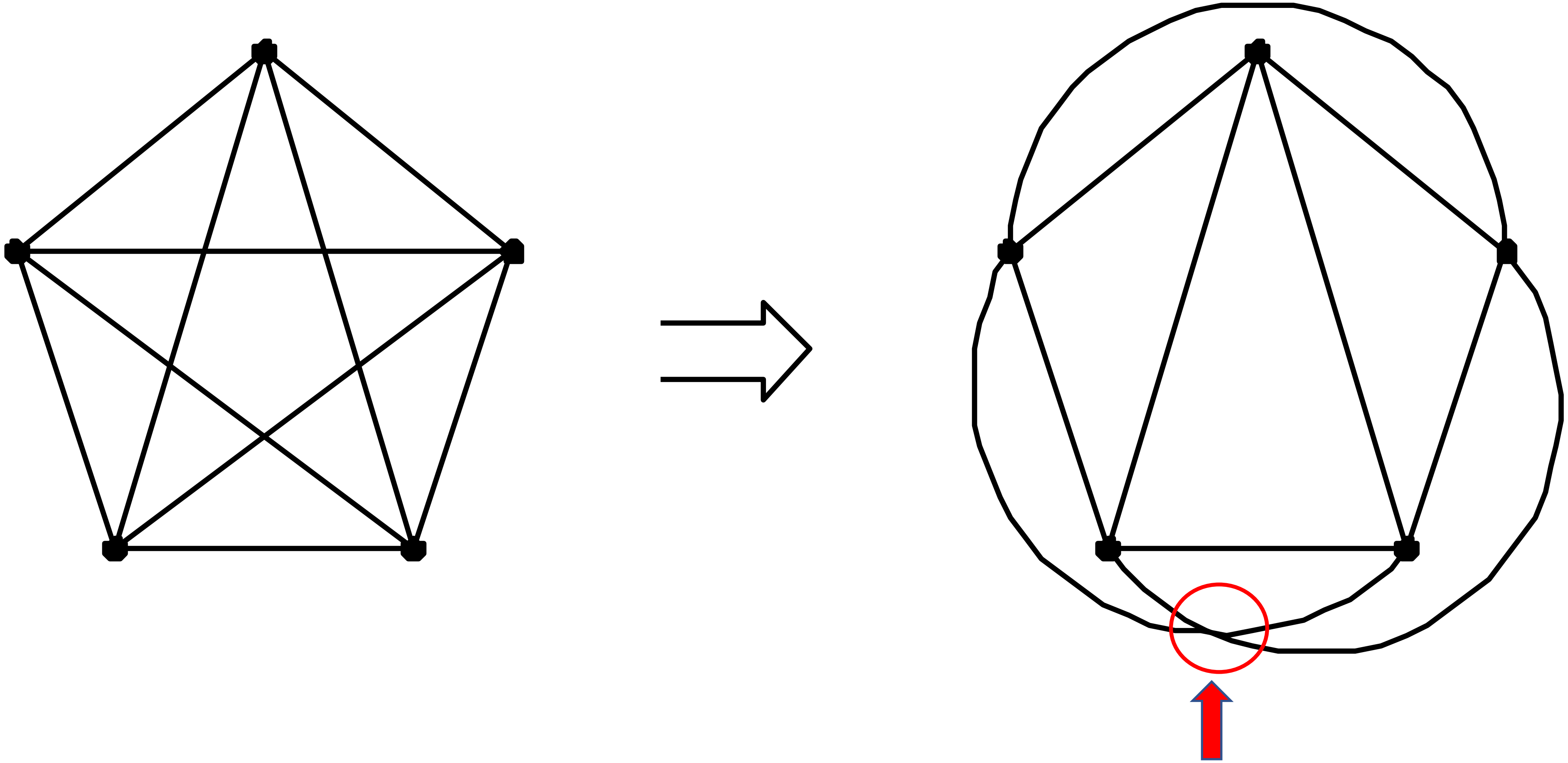
G_2

Graf Planar (*Planar Graph*) dan Graf Bidang (*Plane Graph*)

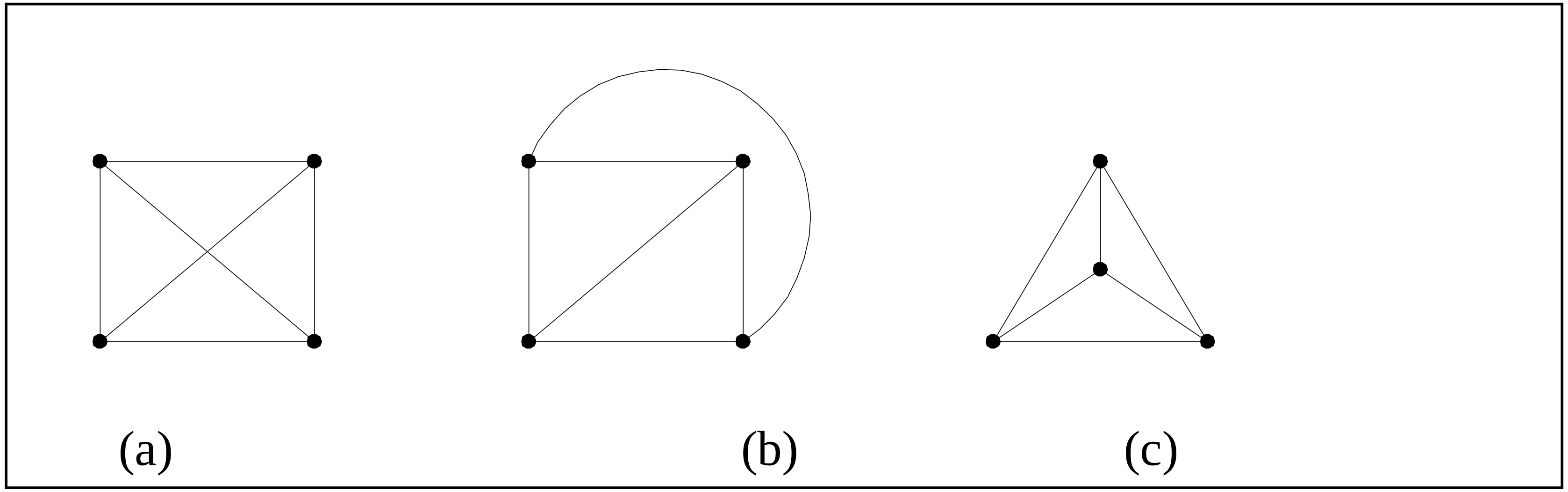
- Graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong (bersilangan) disebut **graf planar**,
- jika tidak, maka ia disebut **graf tak-planar**.
- Contoh: K_4 di bawah ini adalah graf planar:



- K_5 adalah graf tidak planar:



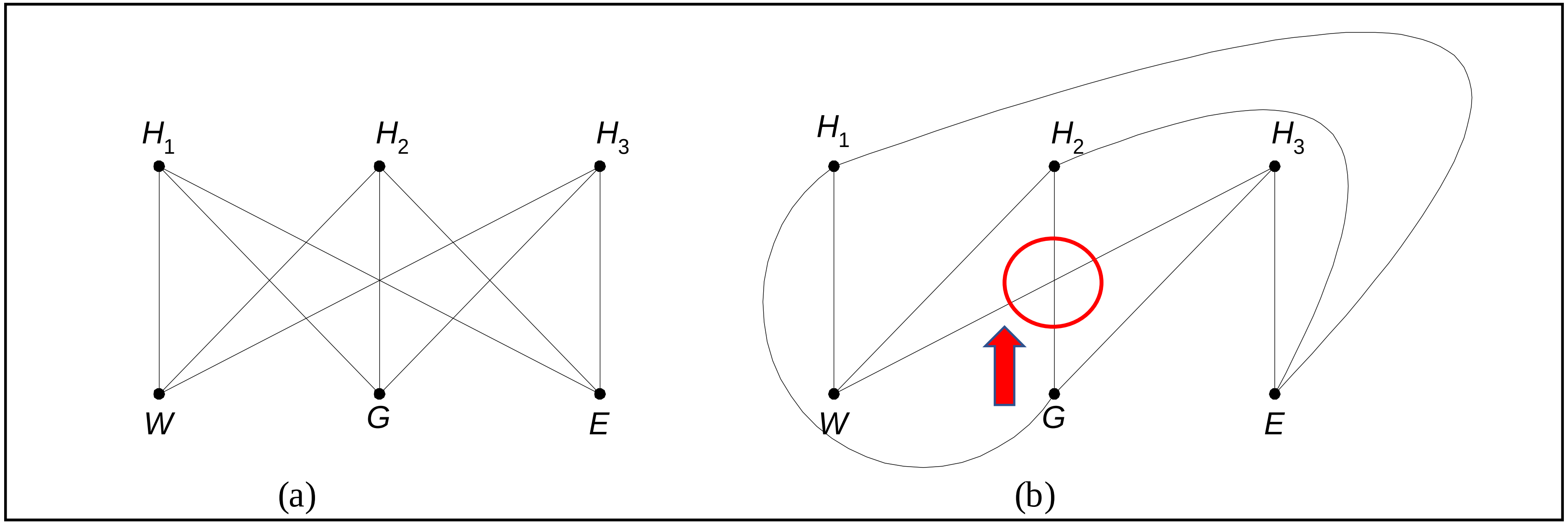
Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut **graf bidang** (*plane graph*).



Tiga buah graf planar. Graf (b) dan (c) adalah graf bidang

Aplikasi Graf Planar

Persoalan utilitas (*utility problem*)



(a) Graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$), (b) graf persoalan utilitas bukan graf planar.

Aplikasi Graf Planar

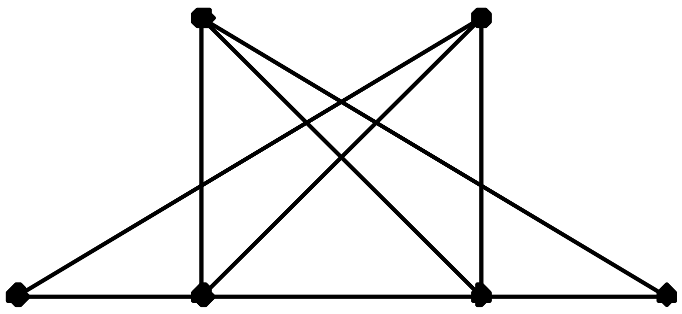
- Perancangan IC (*Integrated Circuit*)

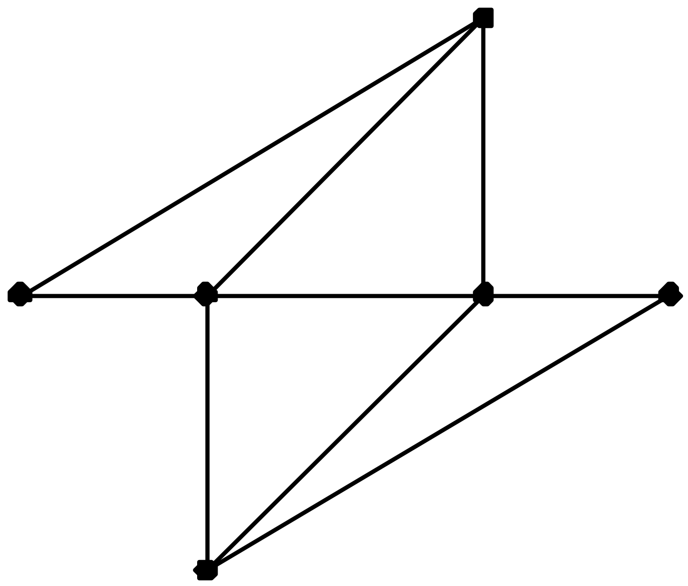
- Tidak boleh ada kawat-kawat di dalam *IC-board* yang saling bersilangan → dapat menimbulkan interferensi arus listrik → *malfunction*

- Perancangan kawat memenuhi prinsip graf planar

Latihan

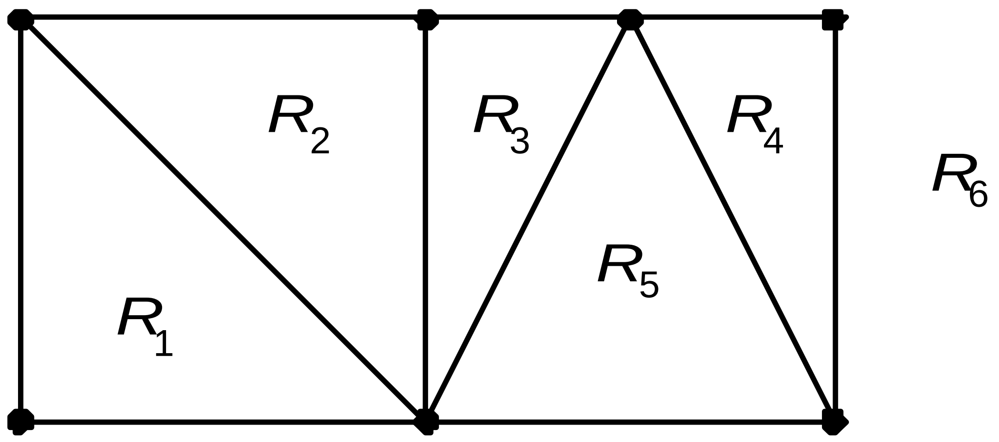
- Gambarkan graf (kiri) di bawah ini sehingga tidak ada sisi-sisi yang berpotongan (menjadi graf bidang). (Solusi: graf kanan)





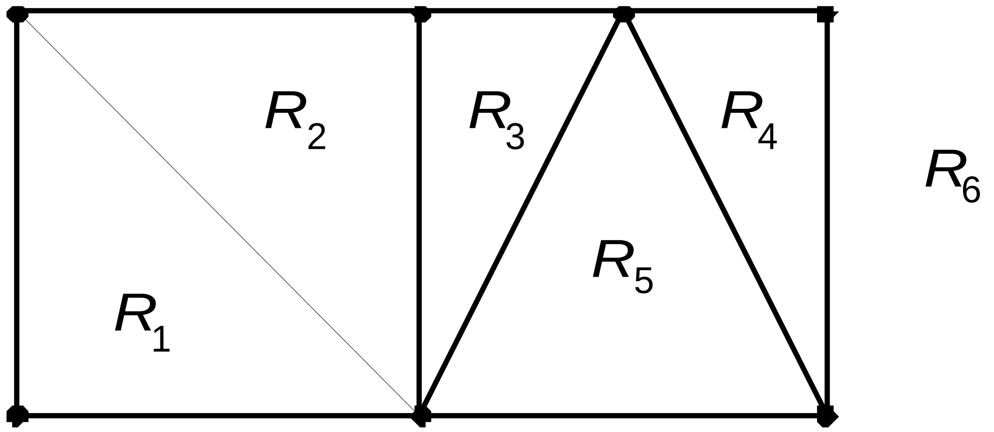
- Sisi-sisi pada graf bidang membagi bidang datar menjadi beberapa wilayah (*region*) atau muka (*face*).

- Graf bidang pada gambar di bawah initerdiri atas 6 wilayah (termasuk wilayah terluar):



- Hubungan antara jumlah simpul (*n*), jumlah sisi (*e*), dan jumlah wilayah (*f*) pada graf bidang:

$$n - e + f = 2 \quad \text{(Rumus Euler)}$$



- Pada Gambar di atas, e = 11 dan n = 7, f = 6, maka $7 - 11 + 6 = 2$.

Latihan

- Misalkan graf sederhana planar memiliki 24 buah simpul, masing-masing simpul berderajat 4. Representasi planar dari graf tersebut membagi bidang datar menjadi sejumlah wilayah atau muka. Berapa banyak wilayah yang terbentuk?

Jawaban:

Diketahui n = jumlah simpul = 24, maka jumlah derajat seluruh simpul = $24 \times 4 = 96$.

Menurut *lemma* jabat tangan,

jumlah derajat = $2 \times$ jumlah sisi,

sehingga

jumlah sisi = e = jumlah derajat/2 = 96/2 = 48

Dari rumus Euler, $n - e + f = 2$, sehingga

$f = 2 - n + e = 2 - 24 + 48 = 26$ buah.

- Pada graf planar sederhana terhubung dengan f buah wilayah, n buah simpul, dan e buah sisi ($e > 2$) selalu berlaku:

$$e \leq 3n - 6$$

- Ketidaksamaan yang terakhir dinamakan **ketidaksamaan Euler**,

- Ketidaksamaan ini dapat digunakan untuk menunjukkan keplanaran suatu graf sederhana

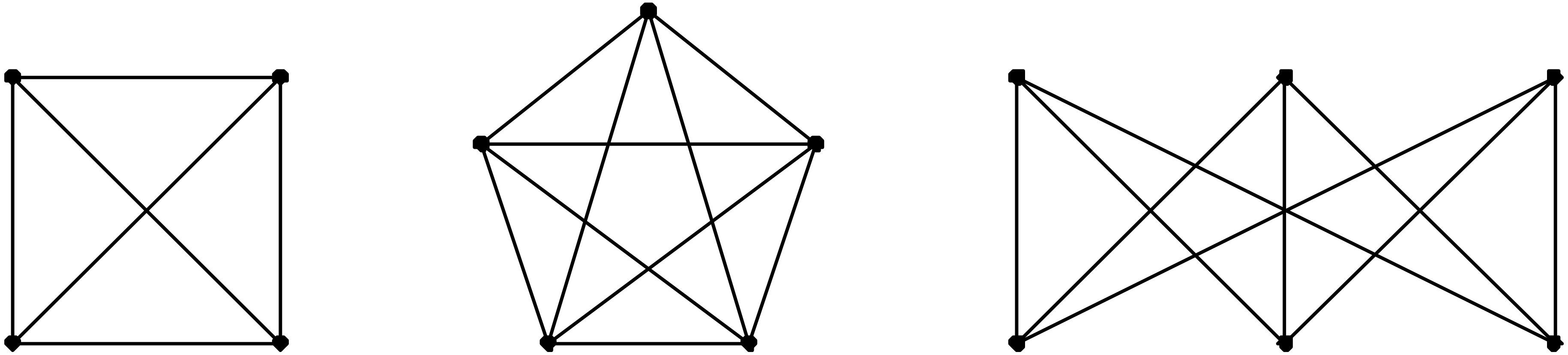
- Jika sebuah graf planar, maka ia memenuhi ketidaksamaan Euler, sebaliknya jika tidak planar maka ketidaksamaan tersebut tidak dipenuhi.

- Contoh: Pada K_4, n = 4, e = 6, memenuhi ketidaksamaan Euler, sebab

$$6 \leq 3(4) - 6.$$ Jadi, K_4 adalah graf planar.

Pada graf K_5, $n = 5$ dan e = 10, tidak memenuhi ketidaksamaan Euler sebab

$$10 \geq 3(5) - 6.$$ Jadi, K_5 tidak planar



K_4 K_5 $K_{3,3}$

Ketidaksamaan $e \leq 3n - 6$ tidak berlaku untuk $K_{3,3}$ karena

$$e = 9, n = 6$$

$$9 \leq (3)(6) - 6 = 12 \quad (\text{jadi, } e \leq 3n - 6)$$

padahal graf $K_{3,3}$ bukan graf planar!

Buat asumsi baru: setiap daerah pada graf planar dibatasi oleh paling sedikit empat buah sisi,

Dari penurunan rumus diperoleh

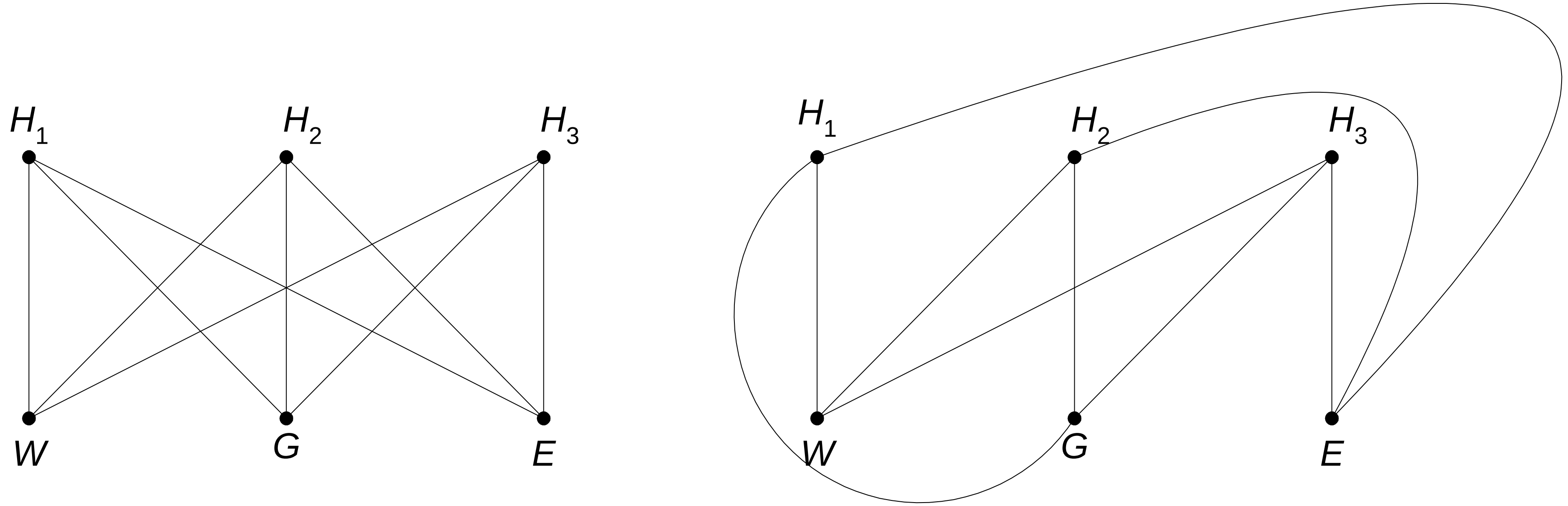
$$e \leq 2n - 4$$

Contoh Graf $K_{3,3}$ pada Gambar di bawah memenuhi ketidaksamaan $e \leq 2n - 4$, karena

$e = 9$, $n = 6$

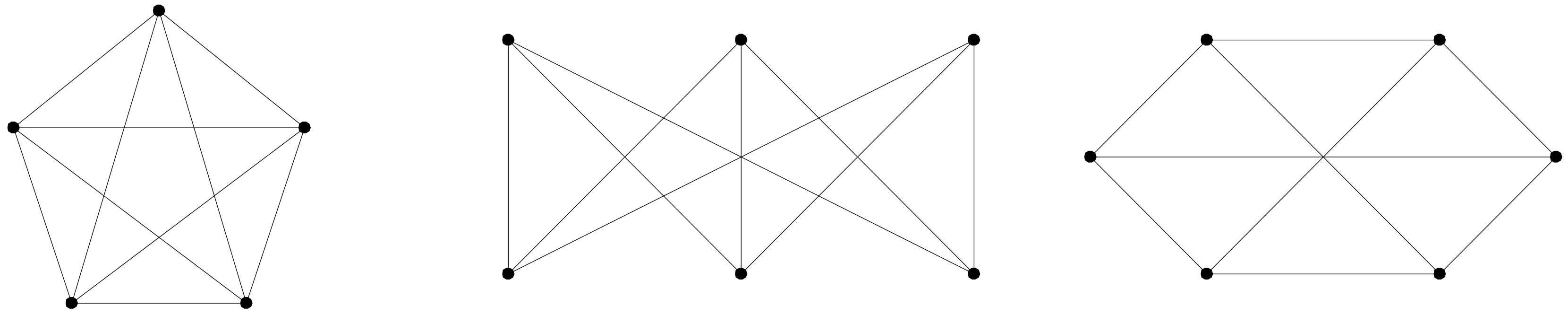
$9 \leq (2)(6) - 4 = 8$ (salah)

yang berarti $K_{3,3}$ bukan graf planar.



Teorema Kuratowski

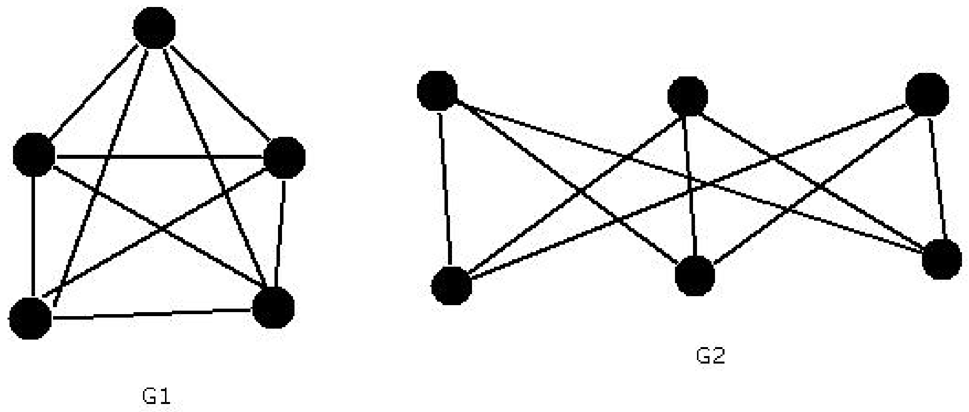
Berguna untuk menentukan dengan tegas keplanaran suatu graf.



(a) (b) (c)

Gambar (a) Graf Kuratowski pertama (K_5)
(b) Graf Kuratowski kedua ($K_{3,\,3}$)
(c) Graf yang isomorfik dengan graf Kuratowski kedua

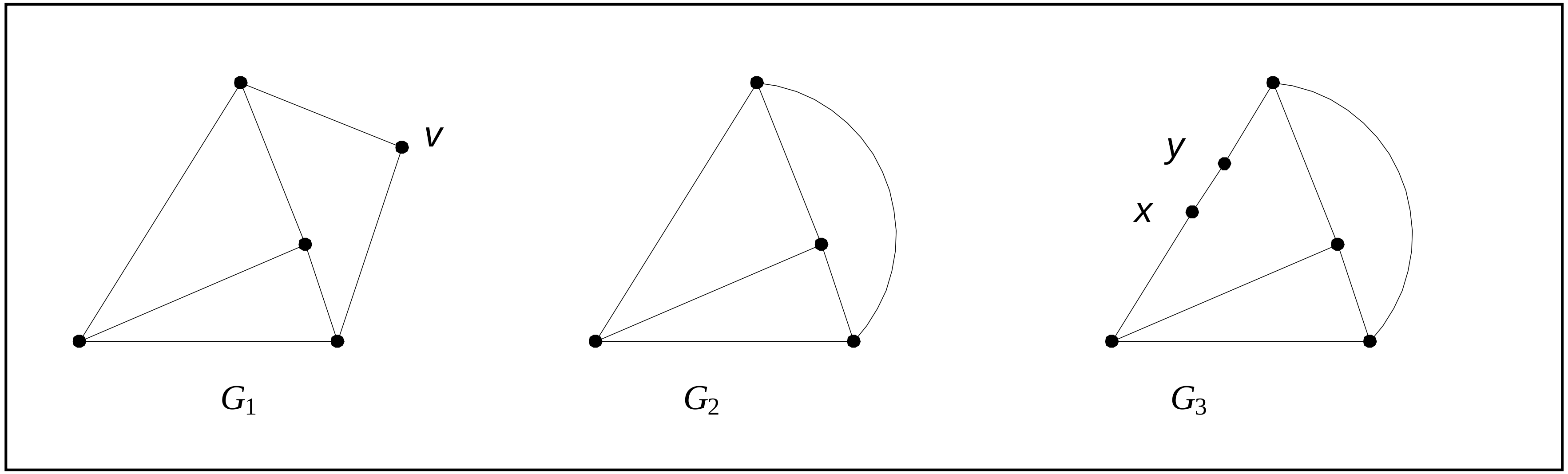
Kazimierz Kuratowski (February 2, 1896 – June 18, 1980) was a Polish mathematician and logician. He was one of the leading representatives of the Warsaw School of Mathematics. (Sumber: Wikipedia)



Sifat graf Kuratowski adalah:

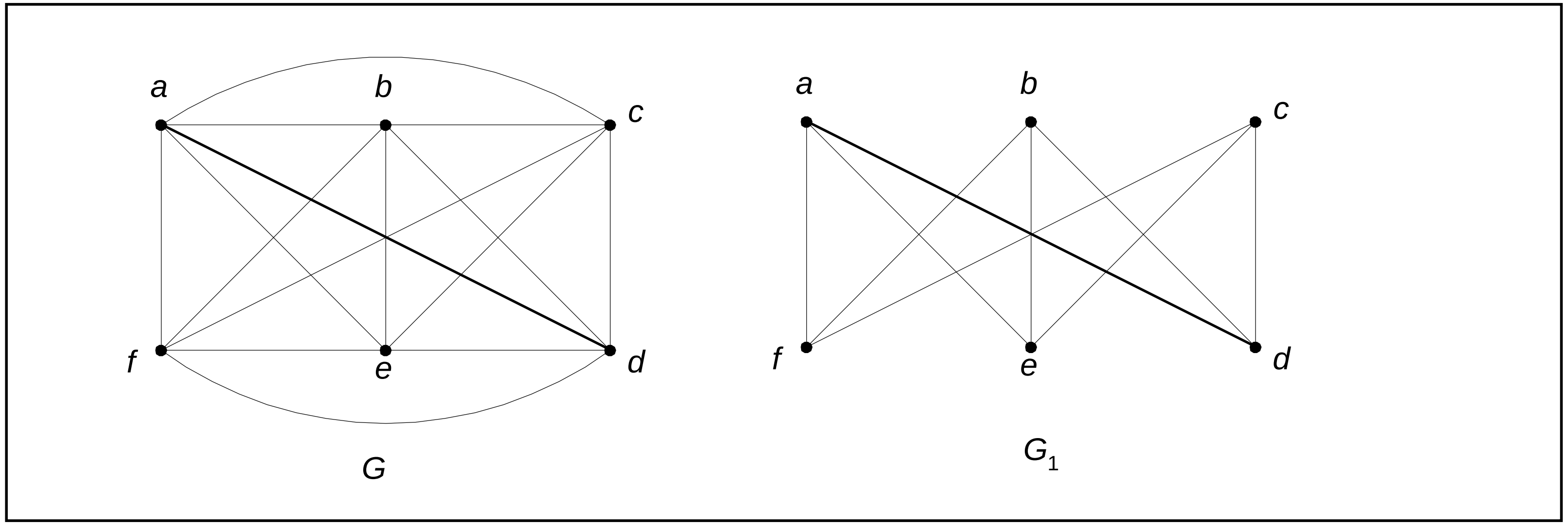
1. Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur.
2. Kedua graf Kuratowski adalah graf tidak-planar
3. Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski menyebabkannya menjadi graf planar.
4. Graf Kuratowski pertama adalah graf tidak-planar dengan jumlah simpul minimum, dan graf Kuratowski kedua adalah graf tidak-planar dengan jumlah sisi minimum.

TEOREMA Kuratowski. Graf *G* bersifat planar jika dan hanya jika ia tidak mengandung upagraf yang isomorfik dengan salah satu graf Kuratowski atau homeomorfik (*homeomorphic*) dengan salah satu dari keduanya.



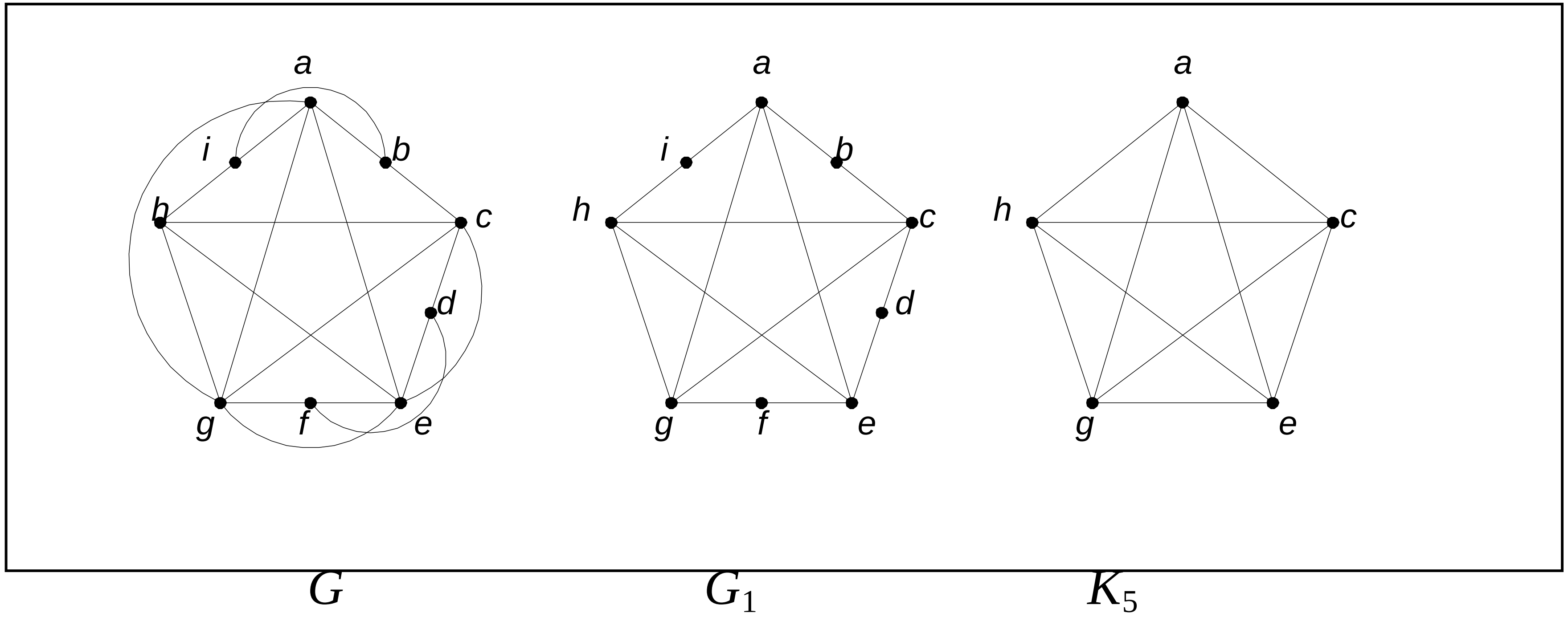
Gambar Tiga buah graf yang homemorfik satu sama lain.

Contoh: Kita gunakan Teorema Kuratowski untuk memeriksa keplanaran graf. Graf *G* di bawah ini bukan graf planar karena ia mengandung upagraf (G_1) yang sama dengan $K_{3,3}$.



Graf *G* tidak planar karena ia mengandung upagraf yang sama dengan $K_{3,3}$.

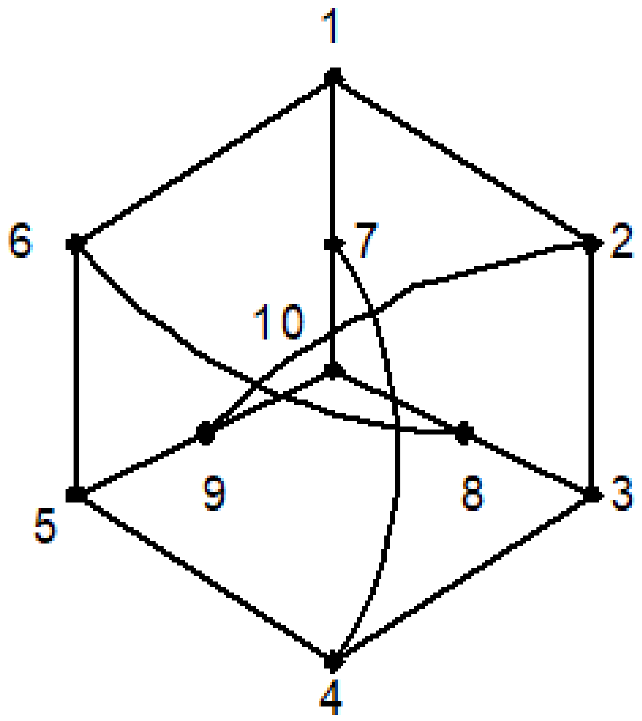
Graf G tidak planar karena ia mengandung upagraf (G_1) yang homeomorfik dengan K_5 (dengan membuang simpul-simpul yang berderajat 2 dari G_1, diperoleh K_5).



Gambar Graf G, upagraf G_1 dari G yang homeomorfik dengan K_5.

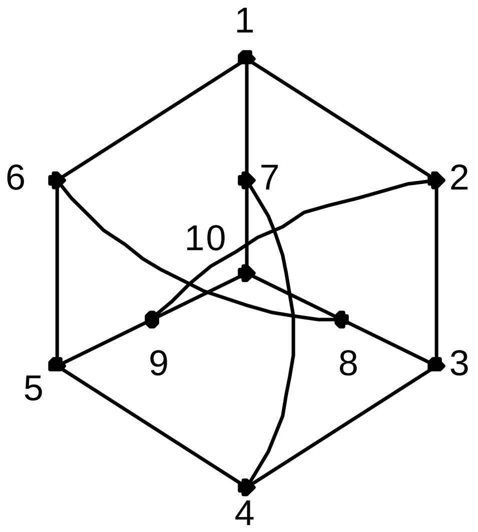
Latihan

- Perlihatkan dengan teorema Kuratowski bahwa graf Petersen tidak planar.

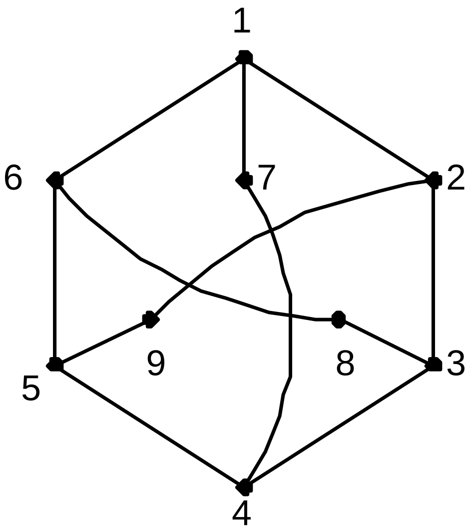


Graf Petersen, G

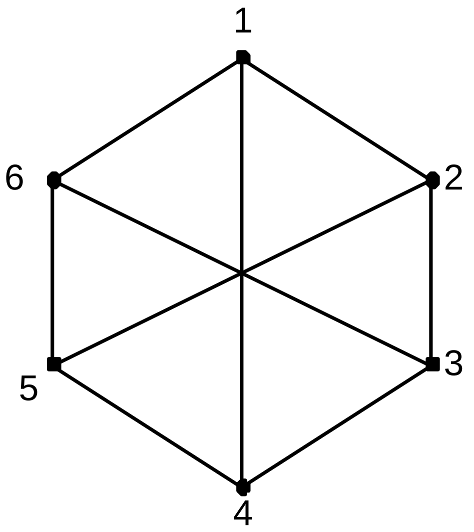
Jawaban:



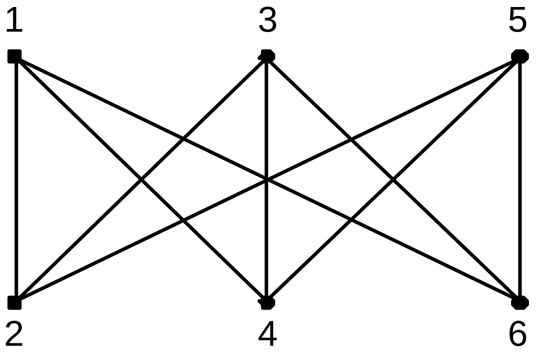
(a) Graf Petersen, G



(b) G_1



(c) G_2

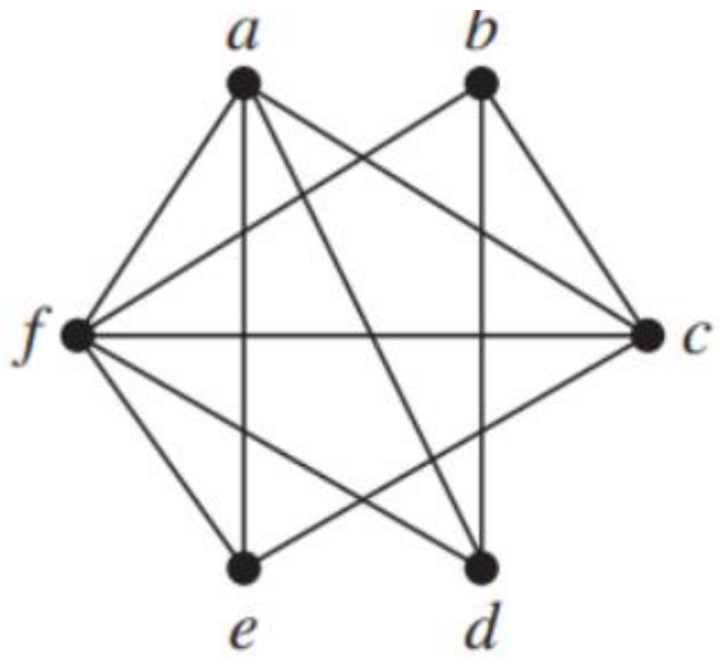


(d) $K_{3,3}$

Gambar (a) Graf Petersen
(b) $G1$ adalah upagraf dari G
(c) $G2$ homeomorfik dengan $G1$
(d) $G2$ isomorfik dengan $K3,3$

Latihan (Kuis 2022)

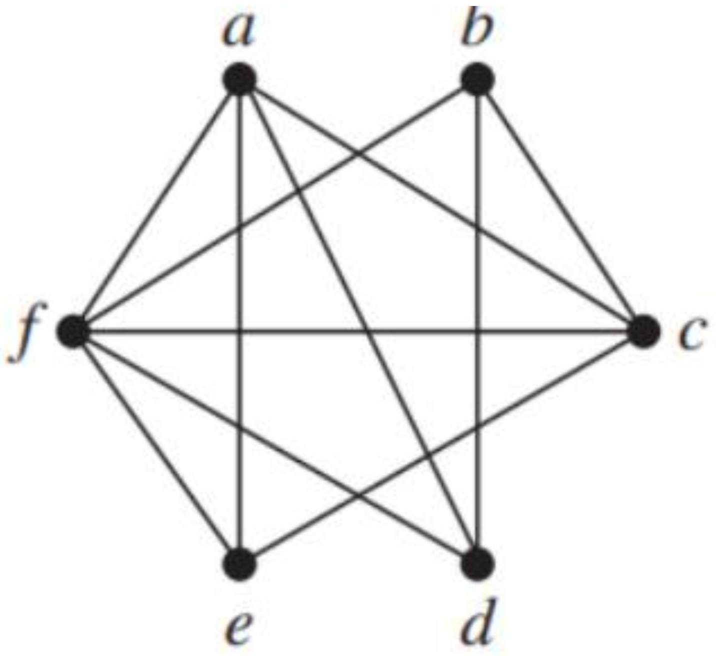
Apakah graf di samping kanan ini planar atau bukan. Apabila planar, maka gambar ulang graf sehingga tidak ada sisi yang saling memotong.

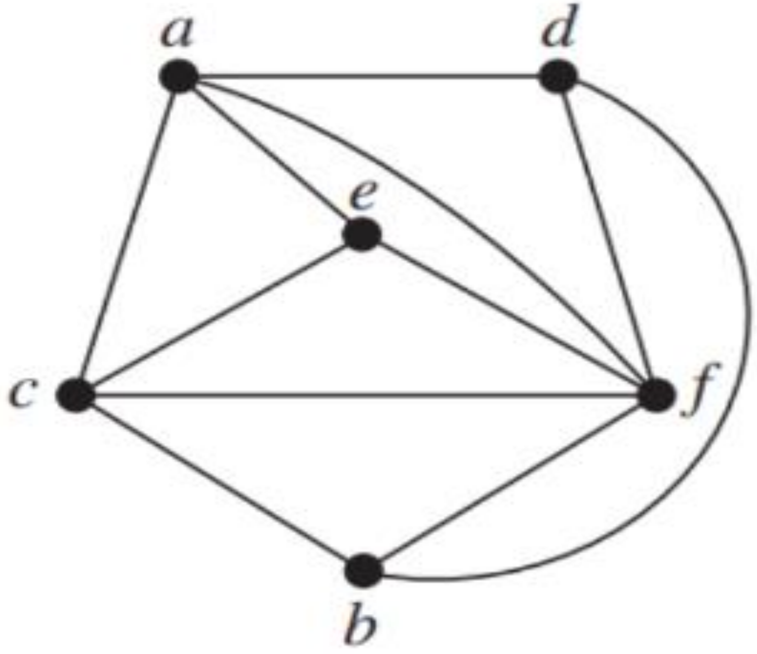


(jawaban pada halaman sesudah ini)

Jawaban:

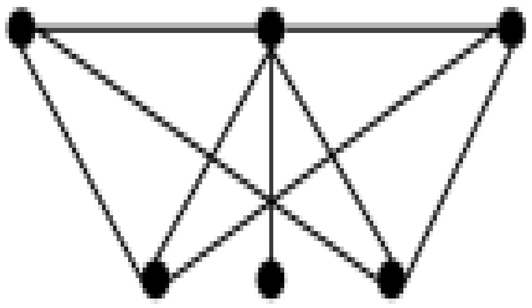
Graf tersebut planar karena tidak mengandung subgraph yang homeomorfic dengan $K_{3,3}$ ataupun K_5. Berikut alternatif gambar graf:

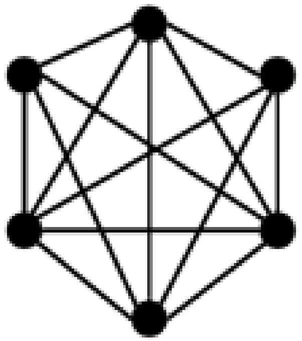




Latihan (Kuis 2021)

Apakah graf berikut planar? Jika iya, gambarkan dalam bentuk planar. Jika tidak, jelaskan menggunakan teorema Kuratowski!

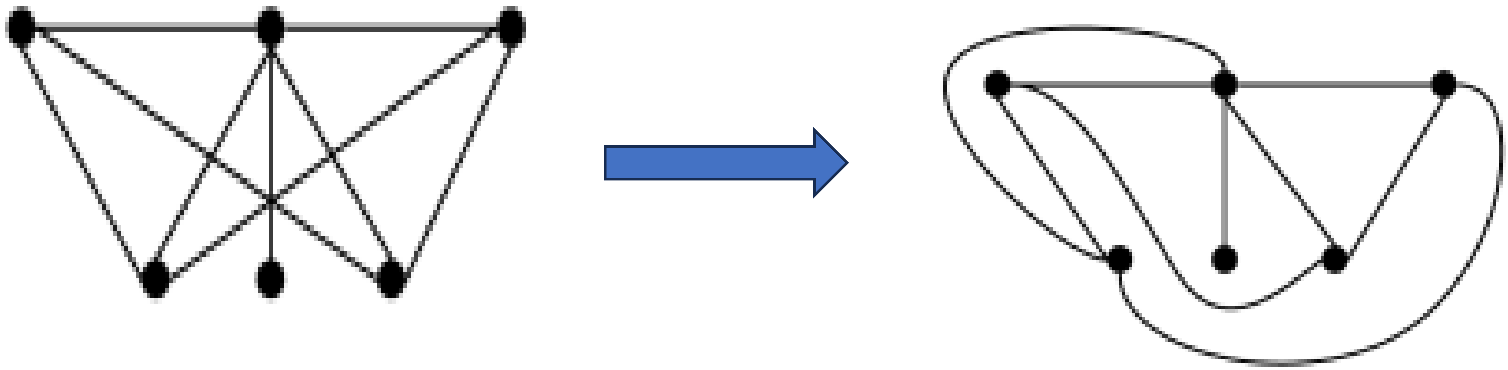




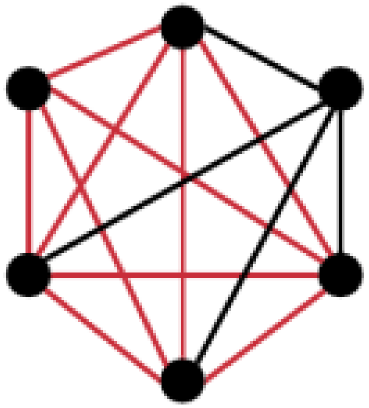
(jawaban pada halaman sesudah ini)

Jawaban:

a) Bisa, graf dapat diubah menjadi

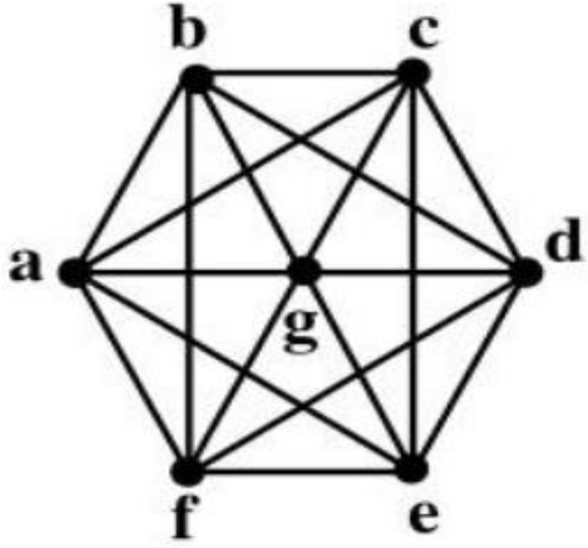


b) Tidak bisa, graf mengandung graf Kuratowski pertama (garis berwarna merah):



Latihan

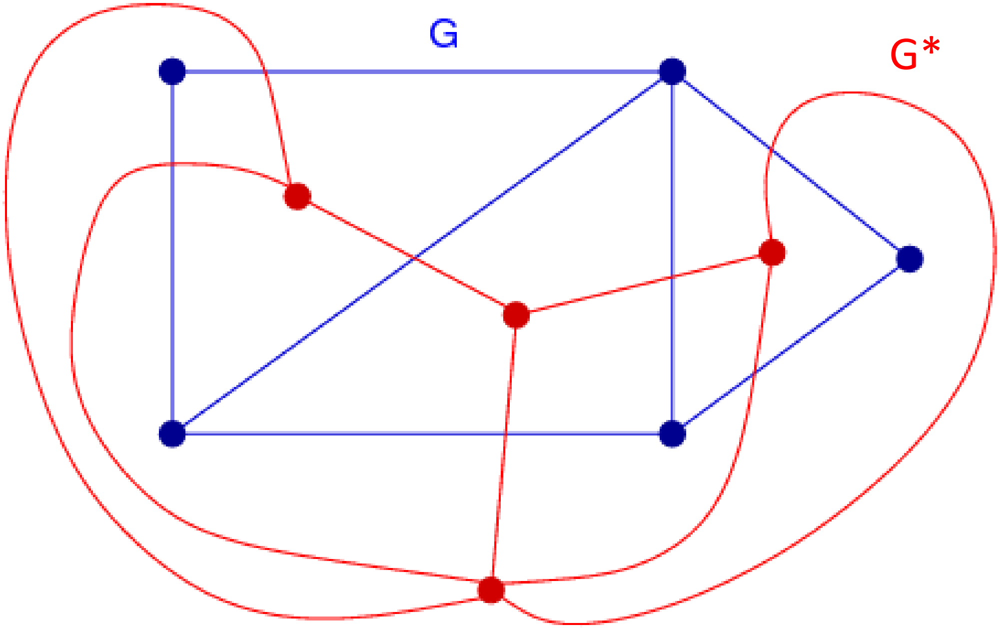
Periksalah dengan teorema Kuratowski bahwa graf berikut tidak planar

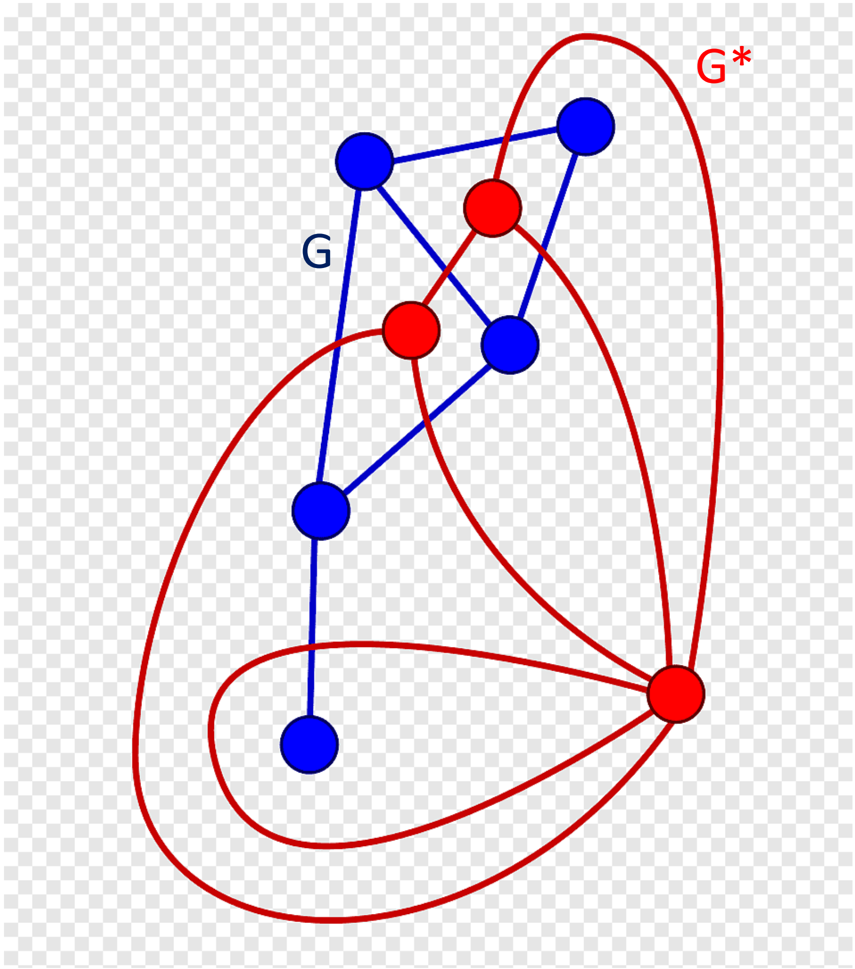


Graf Dual (*Dual graph*)

Untuk setiap graf bidang G, kita dapat membuat graf dual G* dengan cara sebagai berikut:

1. Setiap wilayah atau muka f dinyatakan sebagai sebuah simpul v*, termasuk wilayah luar.
2. Tariklah sebuah sisi e* dari sebuah simpul v1* ke simpul v2* melewati sisi e pada graf asal.
3. Jika sisi e pada salah satu simpulnya berderajat satu, maka sisi e* adalah berupa sisi gelang


G
G*


G*
G

Bersambung ke Bagian 3