

Bahan kuliah
IF2120 Matematika Diskrit

Himpunan

(Bag. 3 - Update 2024)

Oleh: Rinaldi Munir



Program Studi Teknik Informatika
STEI - ITB

Partisi

- Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong A_1, A_2, \dots dari A sedemikian sehingga:
 - (i) $A_1 \cup A_2 \cup \dots = A$, dan
 - (ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$
- **Contoh 32.** Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi A .

Himpunan-ganda (Multiset)

- Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan-ganda** (*multiset*).

Contoh: $\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$, $\{2, 2, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{\}$.

- **Multiplisitas** dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: $M = \{0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1\}$, multiplisitas 0 adalah 4.
- Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas setiap elemennya adalah 0 atau 1.
- Kardinalitas suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan yang ekuivalen dengannya, dengan mengasumsikan semua elemen di dalam *multiset* berbeda. Contoh: $A = \{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$, maka $|A| = 6$

Operasi Antara Dua Buah *Multiset*:

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

1. $P \cup Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q .

Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$,

$$P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$$

2. $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q .

Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$

$$P \cap Q = \{ a, a, c \}$$

3. $P - Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan:
- multiplisitas elemen tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q , jika selisihnya positif
 - 0, jika selisihnya nol atau negatif.

Contoh: $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P - Q = \{ a, e \}$

4. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q .

Contoh: $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,
 $P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$

Latihan (soal UTS 2022)

Fakultas Teknik di Universitas Bangsaku sedang mendaftarkan kebutuhan prasarana hardware baru dari prodi-prodinya. Prodi Teknik Industri (TI) membutuhkan 100 personal computer (PC), 40 *router*, dan 5 *server*. Sedangkan prodi Teknik Mesin (MS) membutuhkan 10 PC, 7 *router*, dan 2 *mainframe*. Kebutuhan tersebut dinyatakan dalam bentuk *multiset* A (prodi TI) dan *multiset* B (prodi MS).

Tentukan *hardware* apa saja dan jumlahnya yang harus disediakan fakultas pada kondisi:

- Prodi TI dan prodi MS dapat saling berbagi prasarana.
- Prodi TI dan prodi MS tidak dapat berbagi prasarana.
- Pengadaan hanya bisa untuk kebutuhan prodi MS dan alat tsb tidak dibutuhkan prodi TI.

Nyatakan jawaban Anda dalam bentuk operasi himpunan dan hasil perhitungannya.

Petunjuk: *Multiset* dapat juga dituliskan dalam bentuk $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \dots, m_r \cdot a_r\}$, dengan m adalah multiplisitas dari setiap elemen a .

Jawaban:

Misalkan A adalah himpunan *multiset* kebutuhan *hardware* prodi TI, dan B adalah himpunan *multiset* kebutuhan *hardware* prodi MS.

Misalkan: p = banyak kebutuhan PC (unit); r = banyak kebutuhan *router* (unit); s = banyak kebutuhan *server* (unit); m = banyak kebutuhan *mainframe* (unit). Maka,

$$A = \{100p, 40r, 5s\}$$

$$B = \{10p, 7r, 2m\}$$

a) $A \cup B = \{100p, 40r, 5s\} \cup \{10p, 7r, 2m\} = \{100p, 40r, 5s, 2m\}$

Penyediaan oleh fakultas: 100 PC, 40 *router*, 5 *server*, 2 *mainframe*

b) $A + B = \{100p, 40r, 5s\} + \{10p, 7r, 2m\} = \{110p, 47r, 5s, 2m\}$

Penyediaan fakultas: 110 PC, 47 *router*, 5 *server*, 2 *mainframe*

c) $B \cap A' = B - A = \{10p, 7r, 2m\} - \{100p, 40r, 5s\} = \{2m\}$

Penyediaan oleh fakultas: 2 *mainframe*

Tipe *Set* dalam Bahasa Python

- Bahasa Python menyediakan struktur data untuk *set* beserta operasi-operasinya.
- Membuat himpunan kosong dengan *set constructor*:

```
myset = set()  
myset2 = set([]) # both are empty sets
```

- Membuat sebuah himpunan dengan *set constructor* atau notasi { }

```
myset = set(sequence)
myset2 = {ekspresi for variabel in sequence}
myset3 = {daftar elemen}
```

```
>>> myset = set('matematika')           # cara pertama
>>> myset                                # Menampilkan himpunan
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't'}
```

```
>>> myset = {x for x in 'matematika'} # cara kedua
>>> myset                                # Menampilkan himpunan
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't'}
```

```
>>> myset2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
>>> myset2
{1, 2, 3, 4, 5, 6}
```

```
>>> myset.add('z')      # Menambahkan elemen baru 'z'
>>> myset
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't', 'z'}

>>> myset.remove('t')  # Menghapus elemen 't'
>>> myset
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 'z'}

>>> myset.pop()        # Mengambil elemen teratas
'z'

>>> myset
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm'}
```

- Operator \geq dan \leq adalah untuk menguji apakah sebuah himpunan merupakan *superset* atau *subset* terhadap himpunan yang lain
- Operator $>$ dan $<$ adalah operator untuk menguji *proper superset* atau *proper subset*.

```
>>> S1 = set('matematika')
>>> S2 = set('matika')
>>> S1 >= S2
True
>>> S1 <= S2
False
>>> S2 <= S1
True
>>> S2 < S1
True
```

Operasi Himpunan

- Gabungan: $set \cup other \cup \dots$
- Irisan: $set \cap other \cap \dots$
- Selisih: $set - other - \dots$
- Beda setangkup: $set \Delta other$

```
>>> S1 = set('matematika')
>>> S1
{'a', 'e', 'i', 'k', 'm', 't'}
>>> S2 = set('diskrit')
>>> S2
{'d', 'i', 'k', 'r', 's', 't'}
>>> S1 | S2
{'a', 'd', 'e', 'i', 'k', 'm', 'r', 's', 't'}
>>> S1 & S2
{'i', 'k', 't'}
>>> S1 - S2
{'a', 'e', 'm'}
>>> S2 - S1
{'d', 'r', 's'}
>>> S1 ^ S2
{'a', 'd', 'e', 'm', 'r', 's'}
```

Latihan Soal-Soal Himpunan dari berbagai kuis 1

1. **(Kuis 2013)** Misalkan A dan B adalah sebuah himpunan. Buktikan dengan hukum-hukum himpunan, jangan lupa menyebutkan hukum yang dipakai.

$$(A \cap B) \cup \overline{(A \cup B)} = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$$

Jawaban:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \bar{B})} &= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \overline{\bar{B}}) && \text{(Hukum De Morgan)} \\ &= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) && \text{(Hukum Involusi)} \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) && \text{(Hukum Komutatif x2)} \\ &= B \cap (A \cup \bar{A}) && \text{(Hukum Distributif)} \\ &= B \cap U && \text{(Hukum Komplemen)} \\ &= B && \text{(Hukum Identitas)}\end{aligned}$$

2. **(Kuis 2014)** Hitunglah banyak bilangan genap diantara 1 sampai 2000 yang habis dibagi 7 tetapi tidak habis dibagi 9.

- **Jawaban:** Banyak bilangan tersebut adalah banyak bilangan yang habis dibagi 2 dan 7 dikurangi banyak bilangan yang habis dibagi 2,7, dan 9.

$$\text{Banyak bilangan habis dibagi 2 dan 7} = \left\lfloor \frac{2000}{14} \right\rfloor = 142$$

$$\text{Banyak bilangan habis dibagi 2,7, dan 9 ada} \left\lfloor \frac{2000}{126} \right\rfloor = 15$$

Jadi, banyak bilangan tersebut adalah $142 - 15 = 127$.

3. **(Kuis 2022)** Ketua himpunan HMIF berencana membuat acara pertandingan olahraga untuk merayakan pelantikan anggota baru. Dari data yang didapat, jumlah peserta yang mengikuti pertandingan basket adalah $\frac{7}{2}$ kali jumlah peserta yang menyukai futsal dan basket. Jumlah peserta yang mengikuti pertandingan futsal adalah $\frac{5}{2}$ kali jumlah peserta yang menyukai futsal dan basket. Jika jumlah peserta ada sebanyak 300 orang dan peserta yang mengikuti lomba sudah pasti menyukai olahraga tersebut, maka berapa banyak peserta yang mengikuti pertandingan futsal tetapi tidak menyukai basket?

Jawaban:

F = Himpunan mahasiswa suka futsal

B = Himpunan mahasiswa suka basket

$F \cap B$ = Himpunan mahasiswa yang suka Futsal dan Basket

Ditanya: $n(F - (F \cap B)) = ?$

$$n(B) = 7/2 n(F \cap B)$$

$$n(F) = 5/2 n(F \cap B)$$

$$n(F \cup B) = 300$$

$$n(F \cup B) = n(F) + n(B) - n(F \cap B)$$

$$300 = 5/2 n(F \cap B) + 7/2 n(F \cap B) - n(F \cap B)$$

$$300 = 5 n(F \cap B)$$

$$n(F \cap B) = 60$$

$$n(F) = 5/2 * 60 = 150$$

$$n(F - (F \cap B)) = 150 - 60 = 90 \text{ peserta}$$

4. **(Kuis 2011)** Hitung berapa bilangan bulat positif yang lebih kecil atau sama dengan 200 yang habis dibagi 4 atau 7 atau 9?

Jawaban: Misalkan :

A = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 4,

B = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 7,

C = himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 9

Dengan menggunakan prinsip inklusi eksklusif, banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 200 yang habis dibagi 4 atau 7 atau 9 yaitu :

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{9} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{28} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{36} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{63} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{252} \right\rfloor \\ &= 50 + 28 + 22 - 7 - 5 - 3 + 0 = 85 \end{aligned}$$

5. **(Kuis 2021)** Dengan A, B, dan C berupa himpunan, buktikan bahwa

$$((A \oplus B - C) \cap A^c) = B - A - C$$

dengan menyertakan hukum-hukum himpunan yang digunakan! (Keterangan tanda “c” menyatakan operasi komplemen)

Jawaban:

$$((A \oplus B - C) \cap A^c) = (((A-B) \cup (B-A)) - C) \cap A^c$$

(Definisi operasi \oplus)

$$= (((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap C^c) \cap A^c$$

(Definisi operasi -) 3x

$$= (((A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c))) \cap A^c$$

(Hukum Distributif)

$$= (((A \cap B^c \cap C^c \cap A^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c \cap A^c)))$$

(Hukum Distributif)

$$= (((A \cap A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap C^c \cap A^c \cap A^c)))$$

Hukum Komutatif

$$= (((\emptyset \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap C^c \cap A^c)))$$

(Hukum Komplemen dan Idempoten)

$$= (\emptyset \cup (B \cap C^c \cap A^c))$$

(Hukum Dominansi)

$$= (B \cap C^c \cap A^c)$$

(Hukum Identitas)

$$= (B \cap A^c \cap C^c)$$

(Hukum Komutatif)

$$= B - A - C$$

(Definisi Operasi -) 2x

Terbukti

6. **(Kuis 2021)** Misalkan A dan B adalah sebuah himpunan, buktikanlah kesamaan berikut:

$$(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

Jawaban:

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B) && \text{(definisi selisih)} \\ &= (A \cap B^c) \cup ((B \cap A^c) \cup A) \cap ((B \cap A^c) \cup B) && \text{(hukum distributif)} \\ &= (A \cap B^c) \cup ((B \cap A^c) \cup A) \cap B && \text{(hukum absorpsi)} \\ &= (A \cap B^c) \cup (((B \cap A) \cup (A^c \cap A)) \cap B) && \text{(hukum distributif)} \\ &= (A \cap B^c) \cup (((B \cap A) \cup \emptyset) \cap B) && \text{(hukum komplemen)} \\ &= (A \cap B^c) \cup ((B \cap A) \cap B) && \text{(hukum identitas)} \\ &= (A \cap B^c) \cup (B) && \text{(hukum absorpsi)} \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) && \text{(hukum distributif)} \\ &= (A \cup B) \cap U = A \cup B && \text{(hukum komplemen \& identitas)}\end{aligned}$$

Terbukti

(Keterangan tanda "c" menyatakan operasi komplemen)

7. (Kuis 2022) Jika $n(A - B) = 18$, $n(A \cup B) = 70$ dan $n(A \cap B) = 25$, maka berapa nilai $n(B)$?

Jawaban:

Dengan menggunakan $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

$$70 = 18 + 25 + n(B - A)$$

$$70 = 43 + n(B - A)$$

$$n(B - A) = 70 - 43$$

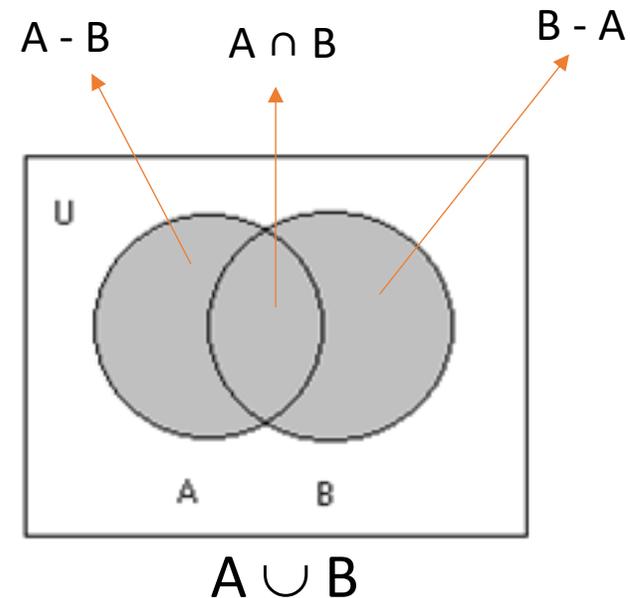
$$n(B - A) = 27$$

Maka,

$$n(B) = n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$= 25 + 27$$

$$= 52$$



8. **(UTS 2010)** Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Buktikan secara aljabar himpunan bahwa $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
9. Berapa banyak bilangan bulat antara 1 dan 200 (termasuk 1 dan 200) yang habis dibagi 3, 5 atau 7 (3 atau 5 atau 7)?

Silakan cari jawabannya gaess...!

Tamat